

**ISAIÁS LIMA FERREIRA**

**A DISTINÇÃO ANALÍTICO - SINTÉTICO  
UM ESTUDO COMPARATIVO ENTRE FREGE E KANT**

Programa de Estudos Pós-graduados em Filosofia

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

São Paulo, 2007

**ISAÍAS LIMA FERREIRA**

**A DISTINÇÃO ANALÍTICO – SINTÉTICO  
UM ESTUDO COMPARATIVO ENTRE FREGE E KANT**

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de mestre em Filosofia, sob orientação do Prof. Dr. Mario Ariel González Porta.

PUC-SP

São Paulo, 2007

BANCA EXAMINADORA

---

---

---

A todos os meus

## Agradecimentos

A Mario González, por tudo. Desde o início até o fim.

Aos professores Edélcio Gonçalves de Sousa e Lúcio Lourenço Prado, pela leitura judiciosa deste trabalho cujas observações permitiram melhorá-lo.

Ao professor Ernesto Maria Giusti, de modo especial, pela generosidade em indicar caminhos, pela atenção e o desprendimento na ajuda em trilhá-los.

## Resumo

Este trabalho tem por objetivo estabelecer a comparação entre os pensamentos de Frege e Kant acerca da distinção entre os juízos analítico e sintético. Chama-se a atenção para o fato de que não há somente uma única concepção de analiticidade no transcurso da filosofia de Kant. O ponto central nessa discussão envolve a natureza dos juízos constitutivos da matemática. À posição kantiana segundo a qual a matemática fundamenta-se em juízos sintéticos *a priori*, Frege opõe sua tese em que sustenta ser os juízos analíticos a base dessa ciência. Contudo, por outro lado, mostra-se positiva ao aceitar os mesmos juízos sintéticos *a priori* na geometria. Inserem-se nesse debate, também, a geometria não-Euclidiana e o formalismo de David Hilbert que desempenharão papel importante como posições divergentes à concepção de geometria Euclidiana da qual compartilham Kant e Frege.

## Abstract

This work aims to establish the comparison between Kant's and Frege's thoughts about the distinction between the analytical and synthetic judgments. Attention is drawn to the fact that there is not only one analyticity conception in the course of Kant's philosophy. The central matter in this debate involves the nature of constitutive judgments of mathematics. Against Kantian position, according to which mathematics is based on synthetic *a priori* judgments, Frege's thesis states that the analytical judgments are this science foundation. It is shown, however, favorable on accepting the same synthetic *a priori* judgments concerning geometry. This debate also includes the non-Euclidean geometry and David Hilbert's formalism that will play an important role as distinct positions Euclidean geometry conception which is shared by Kant and Frege.

## SUMÁRIO

<b>1 - INTRODUÇÃO.....</b>	<b>09</b>
<b>2 - CAPÍTULO PRIMEIRO KANT.....</b>	<b>13</b>
2.1 - Lógica.....	14
2.2 - Crítica da Razão Pura.....	17
2.3 - Prolegômenos.....	23
2.4 - Lógica de Port-Royal.....	25
2.5 - Leibniz.....	27
<b>3 - CAPÍTULO SEGUNDO FREGE.....</b>	<b>31</b>
3.1 - Begriffsschrift: contraste entre as lógicas fregeana e aristotélica.....	33
3.2 - A notação da Begriffsschrift.....	41
3.3 - Logicismo.....	53
<b>4 - CAPÍTULO TERCEIRO COMPARAÇÃO.....</b>	<b>55</b>
4.1 - Juízos analíticos em Kant e Frege.....	59
4.2 - Aprioridade.....	72
4.3 - Juízos sintéticos <i>a priori</i> em Frege e Kant.....	74
4.4 - Frege e Kant e as Geometrias euclidianas e não-Euclidianas.....	77
<b>5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>95</b>
<b>6 - BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>97</b>



## 1- INTRODUÇÃO

Nos séculos XIX e XX apareceram e despontaram diversos filósofos. Nomes como Husserl, Russell e Wittgenstein, citando apenas alguns dos mais proeminentes e representativos, estabeleceram contato direto ou indireto com Frege.

Husserl foi alertado por ocasião de uma resenha escrita por esse autor sobre sua obra *A filosofia da aritmética* na qual aponta a presença de tendência psicologista em sua filosofia, na medida em que concebe o conceito de número a partir de processos psíquicos. Esse acontecimento teve valor inestimável para o criador do conceito de intencionalidade. A filosofia contemporânea pode ser caracterizada também pelo surgimento da filosofia analítica que teve sua origem na concepção de análise de Frege acerca da linguagem. Isso parece ser o bastante para deixar patente o caráter seminal desse autor. Não incorreríamos em erro ao afirmar que o círculo de Viena não existiria sem as filosofias de Wittgenstein. Contudo, tampouco estas, por seu turno, sem o pensamento de Russell talvez tivessem lugar no âmbito do pensamento ocidental. Com respeito à filosofia do principal autor dos *Principia Mathematica*, esta tem ligação indissociável com o pensamento de Frege seja pelo fato da descoberta de uma contradição no sistema lógico dos *Grundgesetze*, o paradoxo que leva seu nome, seja pela tentativa de retificar essa falha, num primeiro momento, e reconduzir, num segundo, o projeto logicista fregeano ao seu objetivo.

Frege teve relevância inquestionável no campo da lógica ao apresentar seu novo sistema em 1879 em sua *Begriffsschrift*. Sua empresa foi fortemente estimulada pelo fato de haver notado que a

lógica aristotélica apresentava limitações de uma cadeia de inferências que passou a ser exigida pelo autor a fim de que pudesse levar a cabo seu projeto que visava reduzir as verdades aritméticas à lógica.

No entanto, Frege reporta-se igualmente às figuras do passado tomando-as como ponto de partida para examinar criticamente seu pensamento. Kant foi um dos pensadores abordados e, no decorrer de sua análise revelou manter com a filosofia desse, movimentos de afastamento e aproximação. A natureza das proposições matemáticas, não só, mas, sobretudo, é que irá servir de elemento condutor para a análise fregeana. A questão pode ser resumida do modo seguinte: assentam as proposições matemáticas em juízos sintéticos *a priori* ou em juízos analíticos? Frege sustentará a segunda suposição e tentará rebater a concepção kantiana calcada na primeira. Para tanto, nosso trabalho está dividido em três capítulos os quais têm estas finalidades por mister.

O primeiro capítulo consiste na apresentação do tratamento dado por Kant aos juízos analítico e sintético, fazendo notar que não há na própria trajetória do pensamento de Kant uma definição coesa acerca desses conceitos. Essa constatação em nada desabona o pensamento kantiano, mas, ao contrário, proporciona a possibilidade sempre de novas abordagens sobre o tema.

No segundo capítulo trataremos da lógica de Frege que é representada por sua *Begriffsschrift* considerada como a inauguração da, assim chamada, nova lógica. Aqui mostraremos como e por que Frege se levanta contra a lógica aristotélica visto que esta

constituía-se num dos obstáculos a serem removidos do caminho que tinha por fim último a redução dos enunciados da aritmética à lógica.

O terceiro e derradeiro capítulo é reservado à comparação entre as perspectivas kantiana e fregeana envolvendo os juízos analítico e sintético. O que buscaremos aqui é analisar de forma mais precisa as concepções em questão de modo a tentar explicitar por que razão Frege rechaça os juízos sintéticos *a priori* como fundamento para a aritmética; e ao contrário, na geometria, não só os subscreve como os defende no âmbito dessa ciência. Aqui a descoberta das geometrias não-Euclidianas desempenhará não um papel secundário no que diz respeito à sua importância no campo científico, mas, por força da natureza e alcance de nosso propósito, apresentar-se-á em suas linhas mais gerais sem, todavia, perder o auxílio imprescindível que prestará ao exame do tema.

A figura de David Hilbert dará de igual modo aporte inestimável à nossa exposição por tratar-se de um pensamento diametralmente oposto aos de Kant e Frege na medida em que os dois últimos sustentam a necessidade do conteúdo objetivo para a constituição da geometria, i.e., a intuição pura do espaço. Conquanto Frege concorde com Kant com respeito à intuição como conteúdo objetivo para a constituição do conhecimento no âmbito da geometria, verifica-se um deslocamento crescente em seu interesse visando o campo semântico pois que, com efeito, a partir de determinado período em sua filosofia, vai cada vez mais aprofundando estudos nessa área de pesquisa. Portanto, resulta inevitável o confronto entre a posição formalista de Hilbert que se preocupa apenas e tão-somente com a

parte sintática da geometria, em flagrante contraste com Kant, por um lado, em total e inconciliável desacordo com Frege, por outro.

## 2 - CAPÍTULO PRIMEIRO KANT

É objeto do presente trabalho apresentar a distinção entre os juízos analítico e sintético tanto em Kant quanto em Frege, para ao fim e ao cabo de tal tarefa realizar um cotejo entre ambos os pensadores destacando seus pontos de divergência e possíveis semelhanças a respeito desse tema. Passemos à análise dos conceitos acima apontados.

Kant e Frege concordam que os juízos matemáticos são juízos extensivos, isto é, informam algo de novo. Fato que, evidentemente, é reconhecível como o primeiro aspecto comum a ambos. Não obstante, para Kant os juízos aritméticos são sintéticos *a priori* enquanto que para Frege a aritmética é constituída por juízos analíticos. O que está em jogo aqui são a natureza e o escopo destes juízos e como Kant e Frege os vêem e os consideram, com suas justificativas e cada um à sua maneira, a base sobre a qual assentará a aritmética.

No que diz respeito ao pensamento de Kant acerca dessa questão há um aspecto de muita relevância a ser destacado: que mesmo em suas obras não temos apenas uma única distinção entre analítico e sintético senão que outras.

## 2.1 - Lógica

Com o objetivo de constataremos essa proposição começaremos por sua *Lógica* (Cf. KANT, I. *Lógica*, # 36 e # 37 A 174). Nesta obra o autor sustenta as seguintes definições em termos de proposições analítica e sintética, oferecendo dois exemplos e, em seguida, suas explicações:

*"Proposições analíticas chamam-se aquelas cuja certeza repousa sobre a identidade dos conceitos (do predicado com a noção do sujeito). As proposições cuja verdade não se funda na identidade dos conceitos devem ser denominadas sintéticas (...). A todo **x**, ao qual convenha o conceito de corpo (**a + b**), também convém a extensão (**b**) - é um exemplo de uma proposição analítica. A todo **x**, ao qual convenha o conceito de corpo (**a + b**), também convém a atração (**c**) - é um exemplo de uma proposição sintética. As proposições sintéticas aumentam o conhecimento materialiter; as analíticas, apenas formaliter. Aquelas contêm determinações (determinationes), estas apenas predicados lógicos."*<sup>1</sup>

Como vimos acima, uma proposição analítica, para que possa ser definida como tal, é exigido que sua certeza esteja fundada sobre a base da identidade entre os conceitos do predicado e a noção do sujeito. Kant apresenta apenas uma definição negativa para a outra proposição, isto é, se a verdade da mesma não encontra fundamento na identidade dos conceitos ela é sintética.

No segmento # 37 da mesma obra Kant aborda as proposições tautológicas. Há de se destacar ainda que o exposto nessa seção

sobre tais proposições será mais à frente, para o tema abordado por nossa dissertação, um ponto de significativo valor.

Nesse excerto o autor inicia sua análise utilizando-se uma vez mais da identidade como o elemento a partir do qual são definidas as proposições analíticas e, além disso, o subdivide em dois tipos diversos que, por conseguinte, darão origem a duas espécies de proposições analíticas também diferentes.

Kant afirma que no âmbito dos juízos analíticos há duas formas de identidade dos conceitos.

*"A identidade dos conceitos em juízos analíticos pode ser uma identidade expressa (explícita) ou não-expressa (implícita). No primeiro caso, as proposições analíticas são tautologias."*<sup>2</sup>

Em sua descrição das proposições tautológicas (*virtualiter*) cuja estrutura lógica é  $A = A$ , ao asserir que elas não têm utilidade nem uso em decorrência do fato de ser vazias ou sem consequência, como é destacado, Kant deixa muito claro a esterilidade dessas proposições com respeito à extensão de nosso conhecimento. Teremos tudo isso ratificado pelo exemplo que se segue:

*"Tal é por exemplo a proposição tautológica: o homem é homem. Pois, se não sei dizer do homem outra coisa senão que ele é um homem, então nada mais sei dele."*<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup> KANT, I. Lógica em Tradução de Guido Antônio de Almeida. *EDIÇÕES TEMPO BRASILEIRO, Rio de Janeiro, 1992, Ak 111/A 174.*

<sup>2</sup> KANT, I. Lógica em Tradução de Guido Antônio de Almeida. *EDIÇÕES TEMPO BRASILEIRO, Rio de Janeiro, 1992, Ak 111/A 174.*

<sup>3</sup> *Idem*, p. 130. *Ak 111/A 174.*

Com respeito a essa definição Kant sofre a censura de Paton ao afirmar que o exemplo acima não se trata de uma tautologia, e veremos mais adiante que Frege irá realizar uma crítica severa a essa concepção, mas isso só foi possível depois do aparecimento de seu artigo *Sinn und Bedeutung*. Paton sustenta que:

*"Kant às vezes descreve a relação de predicado e sujeito em um juízo analítico como uma relação de identidade, mas isso não significa que o sujeito e o predicado são o mesmo. (...) A dificuldade, todavia, é mostrar o que está implícito, e o que não está implícito, em um conceito. Pareceria estar implícito no conceito de triângulo que os ângulos interiores são iguais a dois ângulos retos; mas isto Kant negaria ser um juízo analítico."*<sup>4</sup>

Convém chamar a atenção para o fato de que Kant não define o que seria o segundo tipo de proposição, ao contrário do que faz com o primeiro, isto é, não diz o que seja a identidade não-expressa (*implícita*), limita-se tão-só a caracterizá-la.

*"As proposições implicitamente idênticas, ao contrário, não são sem conseqüências e infecundas; pois elas tornam claro por desenvolvimento (*explicatio*) o predicado que se encontrava não-desenvolvido (*implicite*) no conceito do sujeito."*<sup>5</sup>

Observemos agora como nosso autor define os juízos analíticos e sintéticos na *Crítica da Razão Pura*.

---

<sup>4</sup> PATON, H. J. *Kant's Metaphysics of Experience*, Vol. I, New York, 1936, pp. 84-85.

<sup>5</sup> *Ibidem*, p. 130. *Ak III/A 174*.



## 2.2 - Crítica da Razão Pura

Primeiramente Kant ressalta que há uma relação estabelecida entre o sujeito e o predicado no juízo e esta se dá de duas maneiras, a saber, ou o conceito do predicado B pertence ao conceito do sujeito A como algo que está contido (implicitamente) neste último, ou o conceito do predicado B está totalmente fora do conceito do sujeito A, muito embora esteja em ligação com ele. No exemplo anterior o juízo é chamado de *analítico* e no último ele é *sintético*.

*"Em todos os juízos, nos quais se pensa a relação entre um sujeito e um predicado (...), esta relação é possível de dois modos. Ou o predicado B pertence ao sujeito A como algo que está contido (implicitamente) nesse conceito A, ou B está totalmente fora do conceito A, embora em ligação com ele. No primeiro caso chamo analítico ao juízo, no segundo,| sintético."*<sup>6</sup>

Em seguida nos diz em tom conclusivo que são analíticos os juízos quando estes têm uma ligação do sujeito com o predicado e esta é pensada por identidade; ao contrário, se esta ligação é pensada sem identidade entre eles (sujeito e predicado) os juízos devem ser chamados de sintéticos.

*"Portanto, os juízos (os afirmativos) são analíticos, quando a ligação do sujeito com o predicado é pensada por identidade; aqueles,*

---

<sup>6</sup> KANT, I. Crítica da Razão Pura em Serviço de Educação Fundação Calouste Gulbenkian Tradução de Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. Lisboa, 1997. A 7/B 10.

*porém, em que essa ligação é pensada sem identidade, deverão chamar-se juízos sintéticos.”<sup>7</sup>*

Para classificá-los de *explicativo* e *extensivo* respectivamente usa como critério o acréscimo ou não do predicado ao conceito do sujeito dos quais dependem a ampliação ou a simples explicação de nosso conhecimento. Eis as características dadas, por Kant, a cada um dos juízos.

#### **JUÍZOS ANALÍTICOS**

São apenas *explicativos* uma vez que seu predicado nada acrescenta ao conceito do sujeito. A decomposição por meio da análise é o suficiente para mostrar que os conceitos parciais já estavam pensados no conceito do sujeito.

#### **JUÍZOS SINTÉTICOS**

Estes juízos são *extensivos*, pois acrescentam ao conceito do sujeito um predicado que nele não estava pensado e que, por conseguinte, não poderia ser alcançado pela análise (decomposição) do conceito do sujeito em seus conceitos parciais.

Aproveitando a caracterização dos juízos feita acima e com o objetivo de oferecer à exposição mais nitidez passemos a ver como Kant os concebe nos dois exemplos extraídos da *Crítica da Razão Pura*.

Juízo analítico, exemplo: “*todos os corpos são extensos*”

---

<sup>7</sup> *Idem*, pp. 42-43. Ak A7/B11.

Juízo sintético, exemplo: "*alguns corpos são pesados*"

Tais exemplos remontam à tradição silogística aristotélica de proposições categóricas. O primeiro sendo da forma universal afirmativa (Todo A é B), e o segundo da forma particular afirmativa (Algum A é B). Este fato não se constitui em nenhuma novidade, pois que o próprio Kant dirá expressamente, que a lógica desde os tempos de Aristóteles apresentava-se acabada e perfeita.

*"Pode reconhecer-se que a lógica, desde remotos tempos, seguiu a via segura, pelo fato de, desde Aristóteles, não ter dado um passo atrás, a não ser que se leve à conta de aperfeiçoamento a abolição de algumas sutilezas desnecessárias ou a determinação mais nítida do seu conteúdo, coisa que mais diz respeito à elegância que à certeza da ciência. Também é digno de nota que não tenha até hoje progredido, parecendo, por conseguinte, acabada e perfeita, tanto quanto se nos pode afigurar."*<sup>8</sup>

Contudo, a guisa de informação preliminar, a aritmética não se deixa resumir a uma estrutura meramente silogística e isso pelo fato dessa ciência tratar com relações de grandeza e quantidade como, por exemplo, o número 2 é maior do que 1 e menor do que 3.

Quanto aos dois exemplos que expressam respectivamente os juízos analítico e sintético, Kemp Smith impõe uma objeção segunda a qual não há a diferença lógica pretendida por Kant, portanto esses juízos seriam iguais ao menos do ponto de vista lógico. Assevera Kemp Smith:

*"Assim, há uma pequena dificuldade em detectar o caráter sintético da proposição: todos os corpos são pesados. Assim tinha primeiro sido exigido do leitor admitir o caráter analítico da proposição: todos os corpos são extensos. As duas proposições são realmente idênticas no caráter lógico. Nenhuma pode ser reconhecida como verdadeira salvo em termos de uma compreensiva teoria da física existente. Se a matéria deve existir em um estado de distribuição a fim de que suas partes possam adquirir através de mútua atração à propriedade do peso, o tamanho de um corpo, ou mesmo sua posse qualquer extensão, pode semelhantemente depender das condições específicas tal como pode concebivelmente não ser universalmente realizada."*<sup>9</sup>

Cumprido dizer que o fato, no caso dos juízos analíticos e sintéticos, de o predicado estar ou não pensado no conceito do sujeito, isto sugere e permite que tais definições sejam denominadas como psicologizantes uma vez que pensar nos remete a idéia de que cada pessoa possui algo assim como uma imagem mental de tal ou qual predicado pertencente ou não a tal e qual sujeito. A propósito desse aspecto, Paton afirma:

*"Esta distinção de analítico e sintético é uma distinção subjetiva, assim o que é analítico para um homem seria sintético para outro? A linguagem de Kant em alguns lugares pode sugerir que a distinção é subjetiva; mas isto, penso, é verdadeiro somente onde o conceito do sujeito é empírico. Assim, falando do conceito empírico, ele diz que um homem pode pensar que no conceito de ouro a qualidade (tal como não enferrujar) do qual outro homem não pode conhecer nada. Isto é*

---

<sup>8</sup> *Idem*, p. Ak BVIII.

<sup>9</sup> SMITH, K. N. A Commentary to Kant's "Critique of Pure Reason", New York, 1999, pp. 38-39.

*evidentemente verdadeiro, porque conceitos empíricos são derivados da experiência, e a experiência de diferentes homens é diferente.*"<sup>10</sup>

Ainda sobre o aspecto subjetivo que podem assumir alguns dos exemplos oferecidos por Kant, com respeito aos juízos, e recém evidenciado por Paton, uma particular seção de um trabalho relevante sobre o pensamento de Kant é de fundamental importância, não apenas para auxiliar na elucidação de tal questão, mas para apontar, confirmar e corroborar a indicação feita por parte de Paton sobre a origem subjetiva expressa por vezes nas palavras de Kant. De Vleeschawer em sua obra *A evolução do pensamento kantiano* constata a clara e forte influência da psicologia de Tetens sob a qual esteve exposta a *Crítica da Razão Pura* em sua primeira edição. Como salienta De Vleeschawer:

*"A imaginação, a dedução psicológica, a distinção entre o entendimento e a razão, são todos os elementos que Kant deve a psicologia de seu tempo. Agora bem, cremos que não é temerário determinar esta influência de uma maneira mais precisa. Temos já dito anteriormente que nos é preciso buscá-la nos Philosophische de Tetens. Em nosso trabalho sobre a dedução, temos consagrado quinze páginas ao resumo das concepções deste psicólogo e lógico que publica em 1776-1777 sua 'suma psicológica'. Se pode, inclusive, ver neste breve resumo tudo o que Kant pôde tirar de útil para seu próprio transcendentalismo. Agora bem, se recordarmos os Versuche de Tetens fixa nossa atenção sobre os três fatores que Kant não parece haver suspeitado antes de 1776, chegamos sempre a uma conclusão*

---

<sup>10</sup> PATON, H. J. *Kant's Metaphysics of Experience*, Vol. I, New York, 1936, p. 83.

*idêntica, o que confere ao conjunto de nossa tese um valor de muito alta probabilidade, se não de certeza.”<sup>11</sup>*

---

<sup>11</sup> DE VLEESCHAWER, H-J. La evolución del pensamiento kantiano, México, 1962, p. 89.

### 2.3 - Prolegômenos

Já nos *Prolegômenos* a definição desses conceitos assenta sobre a base do conteúdo dos juízos. Diz Kant que independentemente da origem dos juízos e de sua natureza lógica, ou eles são *explicativos* que nada acrescentam ao conteúdo do conhecimento ou *extensivos* aumentando o conhecimento dado. Os anteriores são chamados de juízos analíticos e os últimos de juízos sintéticos. A característica dos juízos analíticos é a de não dizer nada no predicado que já não tivesse sido pensado no conceito do sujeito; agora quanto aos juízos sintéticos Kant nos diz que em tais juízos há no predicado algo que não estava pensado no conceito do sujeito, desta forma alargando nosso conhecimento, acrescentando algo novo ao nosso conceito.

*"Ora, seja qual for a origem dos juízos ou a natureza da sua forma lógica, existe neles, quanto ao conteúdo, uma diferença em virtude da qual são ou simplesmente explicativos, sem nada acrescentar ao conteúdo do conhecimento, ou extensivos, aumentando o conhecimento dado; os primeiros podem chamar-se juízos analíticos, e os segundos, sintéticos."*<sup>12</sup>

Uma outra distinção é traçada por Kant, comum tanto à *Crítica* quanto aos *Prolegômenos*, e diz respeito ao princípio de contradição segundo o qual todos os juízos analíticos estão baseados nele sendo, portanto, o princípio supremo desses juízos, e são conhecimento *a priori* independentemente dos conceitos que lhes sirvam de matéria serem empíricos ou não. Porém, é dever dizer que tal princípio tem

---

<sup>12</sup> KANT, I. *Prolegômenos a Toda Metafísica Futura em Tradução de Artur Morão. Lisboa, Edições 70, 1987. § 2.*

limitações, isto é, serve somente como critério negativo de verdade na medida em que assegurar a verdade do conhecimento em sua parte formal. O que é satisfatório quando se trata tão-somente com juízos analíticos, mas insuficiente no que tange aos sintéticos.

Nessa sucinta exposição, a nosso ver, parece ter deixado suficientemente claro que de fato não há ao longo do trajeto intelectual de Kant, cujas obras são a prova incontestada do desenvolvimento de seu pensamento, uma só definição acerca seja de proposições, seja de juízos analíticos e sintéticos.

Embora tenha ficado evidente que a lógica a qual Kant considera como uma ciência perfeita seja a lógica de Aristóteles, há influências lógicas menos remotas do que essa, o que equivale a dizer que no período moderno houve o surgimento de outras tendências lógicas que, de alguma forma, seja opondo-se seja subscrevendo-a e tentando modificá-la, sempre tiveram como referência a lógica aristotélica.

Buscaremos então ao menos delinear um breve quadro histórico que será constituído por alguns personagens e circunstâncias pontuais, do legado aristotélico que predominou até a segunda metade do século XIX.



## 2.4 - Lógica de Port-Royal

Do princípio de sua carreira acadêmica, pelos idos de 1755, Kant adotara e utilizara durante pouco mais de quatro décadas o compêndio de lógica *Auszug aus der Vernunftlehre* de George Friedrich Meier a fim de ministrar suas aulas. Porém é conhecido o fato de que passou não somente por suas mãos, como por quase toda Europa, a Lógica intitulada de "Port-Royal" resultado do trabalho de Antoine Arnaud e Pierre Nicole. Esse tratado cujo título original é *La Logique ou l'art de penser* foi publicado, de forma anônima, na segunda metade do século XVII por volta de 1662 e teve grande difusão por contar com mais de cinquenta edições em francês e muitas inglesas e latinas, essas últimas objetivando entrar em países de língua germânica.

A lógica de Port-Royal foi fortemente marcada pela inspiração cartesiana e recebeu igualmente influência de Pascal. Descartes atesta a história, insurgiu-se com espírito iconoclasta contra todo pensamento antigo. Por via de consequência, a lógica como ciência criada por Aristóteles cede lugar agora à lógica como uma arte que auxilia a pensar melhor; com isso ocorre um deslocamento da preocupação com a lógica teórica que se ocupa com as inferências e silogismos, para uma lógica que toma como o mais importante objetivo, conduzir bem o pensamento. Esse contexto dá origem a um problema que é apontado por Tugendhat em sua *Propedêutica Lógico-Semântica* por ocasião da discussão acerca da disputa dos universais.

"A concepção conceitualista foi a que se impôs no início da modernidade. Ela corresponde à concepção psicológica da lógica. A lógica de

*Port-Royal fala de idéias universais (idées universelles) obtidas por abstração.”.*<sup>13</sup>

Entretanto, essa lógica foi capaz de inserir no léxico filosófico dois conceitos novos que estão presentes até os dias atuais no campo da lógica.

*“No que se refere aos elementos da proposição, há mesmo que assinalar duas novidades de vocabulário. Primeiro, a substituição da palavra idéia à de conceito; em seguida, a distinção, nas idéias, entre a sua compreensão e sua extensão (étendue). (...) a palavra compreensão, nova para este uso, passará para o vocabulário lógico, na sua oposição à extensão. É assim definida: ‘Chamo compreensão da idéia, aos atributos que ela encerra em si, e que não se lhe podem arrebatrar sem destruí-la, como a compreensão da idéia do triângulo encerra extensão, figura, três linhas, três ângulos, e a igualdade desses três ângulos a dois rectos, etc.’”.*<sup>14</sup>

Uma observação tem de ser feita aqui relativa à palavra idéia. Os principais filósofos da modernidade já não mais a usavam no mesmo sentido platônico; e a palavra correspondente para Kant, em alemão, é *Vorstellung* que significa representação. O que se confirma nas palavras de Tugendhat:

*“Deve-se atentar para o fato de que a palavra “idea” tem, no início da modernidade, tanto em latim como em francês e inglês, o mesmo significado da palavra alemã ‘Vorstellung (representação)’, não tendo mais nada a ver com o significado platônico de “idea”.*<sup>15</sup>

<sup>13</sup> TUGENDHAT, Ernst e WOLF, Ursula em PROPEDEÚTICA LÓGICO-SEMÂNTICA. Trad. Fernando A. R. Rodrigues, Editora Vozes Ltda, Rio de Janeiro, 1997, p. 104.

<sup>14</sup> BLANCHÉ Robert e DUBUCS Jacques em HISTÓRIA DA LÓGICA. Trad. Caps, I a XI: António P. Ribeiro; Cap. XII: Pedro E. Duarte, Edições 70, Lisboa 1996, pp. 186-187.

<sup>15</sup> TUGENDHAT, Ernst e WOLF, Ursula em PROPEDEÚTICA LÓGICO-SEMÂNTICA. Trad. Fernando A. R. Rodrigues, Editora Vozes Ltda, Rio de Janeiro, 1997, p. 104.

## 2.5 Leibniz

Outro filósofo que conferiu seus contributos à lógica foi Leibniz. Diferentemente de Descartes, Leibniz soube reconhecer o valor da lógica aristotélica e com espírito conciliador criou oportunidades para intervir sobre o tema, com base em estudos profundos, sem com isso romper com a tradição, antes, servindo de elo e fonte para as filosofias moderna e contemporânea.

A ruptura de Kant com respeito à filosofia do século XVII se concretiza com sua obra *Crítica da Razão Pura*, mas, no entanto, em seu período pré-crítico foi muito influenciado por alguns de seus predecessores entre eles, Leibniz.

Uma das marcas impressas por Leibniz no pensamento de Kant, que resistirá ao período crítico desse último e fará parte de sua concepção lógica, foi a tese da inclusão do predicado no sujeito tomada da tradição. Em uma de suas obras Leibniz explicita tal tese da forma seguinte:

*"É correto, quando se atribui grande número de predicados a um mesmo sujeito e este não é atribuído a nenhum outro, chamá-lo substância individual. Isto, porém, não é suficiente, e tal explicação é apenas nominal. É preciso considerar, portanto, o que é ser atribuído verdadeiramente a um certo sujeito. Ora, é bem constante que toda predicção tem algum fundamento verdadeiro na natureza das coisas, e quando uma proposição não é idêntica, isto é, quando o predicado não está compreendido expressamente no sujeito, é preciso que esteja compreendido nele virtualmente. A isto chamam os filósofos in-esse, dizendo estar o predicado no sujeito. É preciso, pois, o termo do sujeito conter sempre o do predicado, de tal forma que quem entender*

*perfeitamente a noção do sujeito julgue também que o predicado lhe pertence.”.*<sup>16</sup>

Nessa passagem estão implícitos alguns conceitos importantes para a filosofia em geral. Leibniz fala sobre a atribuição de predicados ao sujeito, concede uma definição negativa de uma proposição idêntica. Por outros termos, é quando o predicado não está compreendido no sujeito e vincula a verdade da predicação a essa compreensão do predicado no sujeito. E ao dizer isso, faz, também, referência de forma velada ao princípio de identidade e que se manifesta exatamente quando ocorre tal compreensão.

A referência de estar ou não compreendido o predicado no sujeito, nos remete a noção de *compreensão* destacada há pouco na lógica de Port-Royal. Fato que vem a confirmar que Leibniz não apenas a leu, e dela extraiu elementos relevantes para a lógica como ciência com os quais, ademais, trabalhou a fim de realizar mudanças que trouxessem algum avanço nessa área.

Os esforços de Leibniz não foram em vão e quiçá ninguém mais do que ele soube reconhecer os méritos dos filósofos dos quais tomou os ensinamentos e os aprofundou dando um caráter de continuidade e fundamentação aos mesmos. Ironicamente, há quem não reconheça o resultado do trabalho de Leibniz, como é o caso de Tugendhat, afora alguma imprecisão na tradução, que adota uma postura equívoca ao afirmar que a substituição do conceito "*comprehension*" (compreensão) pelo conceito de "*intension*" (intensão) que foi realizada por sir William Hamilton no século XIX, como nos faz ver a seguir:

---

<sup>16</sup> LEIBNIZ, G. W. Discurso de Metafísica: Tradução de Marilena de Souza Chauí Berlinck. OS

"Com respeito ao outro conceito, ao conceito de conteúdo, o lógico inglês Hamilton substituiu no século XIX o termo "comprehension" pelo termo "intension". Daí a diferença atual entre extensão e intensão."<sup>17</sup>

Objetivando lançar luz em tal questão, é-nos suficiente a citação:

"Com efeito, dizendo todo homem é animal, quero dizer que todos os homens estão compreendidos em todos os animais; ao mesmo tempo, porém, entendo que a idéia do animal está compreendida na idéia do homem. O animal compreende mais indivíduos que o homem, mas o homem compreende mais idéias ou mais formalidades; um tem mais exemplos, o outro mais graus de realidade; um tem maior extensão, o outro maior intensão."<sup>18</sup>

Convém ter presente que a lógica de Kant é intensional uma vez que parte daquela noção, exposta acima por Leibniz, de que um número de predicados é atribuído ao conceito do sujeito como suas notas características (*Merkmale*), que todo conceito tem um conteúdo, já utilizando uma terminologia da *Lógica* que vai seguir sendo usada em outras obras ulteriores como, por exemplo, na *Crítica*. Vejamos como se apresenta na *Lógica*:

"Todo conceito, enquanto conceito parcial, está contido na representação das coisas; enquanto razão do conhecimento, isto é, enquanto

---

PENSADORES, Editora Abril, São Paulo, 1974, § 8.

<sup>17</sup> TUGENDHAT, Ernst e WOLF, Ursula em PROPEDEÚTICA LÓGICO-SEMÂNTICA. Trad. Fernando A. R. Rodrigues, Editora Vozes Ltda, Rio de Janeiro, 1997, p. 105.

<sup>18</sup> LEIBNIZ, G. W. Novos Ensaio Sobre o Entendimento Humano: Tradução de Luiz João Baraúna. OS PENSADORES, Editora Nova Cultural Ltda, São Paulo, 1996, IV, 17, § 8.

*nota característica, estas coisas estão contidas sob ele. Sob o primeiro / aspecto, todo conceito tem um conteúdo; sob o segundo, uma extensão.”.<sup>19</sup>*

Kant entende, portanto, que o conceito contém em si e é composto por seus conceitos parciais. Por exemplo, o conceito “corpo” contém os conceitos parciais de “impenetrabilidade” e “extensão” dentre outros que formam, assim, o conteúdo desse conceito. A lógica de Kant é intensional exatamente pelo fato de que o conceito é formado pela totalidade de seus conceitos parciais que o constituem.

Com isso, fechamos nosso quadro histórico que pretendeu oferecer uma visão que embora geral, esperamos seja, útil e precisa.

---

<sup>19</sup> KANT, I. Lógica em Tradução de Guido Antônio de Almeida. *EDIÇÕES TEMPO BRASILEIRO, Rio de*

### 3 – CAPÍTULO SEGUNDO FREGE

O primeiro trabalho lógico de Frege apareceu no ano de 1879 com a publicação de sua obra cujo título no original alemão é: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*; que vertido para o português ficou conhecido como *Conceitografia, uma linguagem formular, modelada sobre aquela da aritmética, para o pensamento puro*.

A *Begriffsschrift* de Frege apresentou novidades decisivas em comparação à lógica aristotélica que determinaram um marco divisório no âmbito dessa ciência como, por exemplo, a substituição da estrutura sujeito-predicado por a de função e argumento.

Se, por um lado, não é possível afirmar, sem o ônus do erro, que a lógica desenvolvida por Frege é a tentativa de reordenação da lógica aristotélica, por outro, constata-se que não houve uma ruptura de caráter definitivo entre elas, mas o aperfeiçoamento da lógica como um todo, tornando-a mais ampla e eficaz no auxílio da ciência. O fato mesmo de a teoria tradicional do silogismo ter sido incorporada à lógica fregeana parece confirmar isso. Acompanhem as palavras de Hans D. Sluga:

*"Por seus meios ele teve êxito em formular o que chegou a lógica moderna de predicado - a teoria que incorpora a teoria tradicional do silogismo, mas é mais extensa, mais rigorosa, e mais útil."*<sup>20</sup>

---

*Janeiro, 1992, A 148.*

<sup>20</sup> SLUGA, Hans D. in Gottlob Frege, *The Arguments of the Philosophers*. Editor: Ted Honderich, London and New York, 2001, p. 82.

É necessário fazer uma observação quanto ao que Frege enfrentou um pouco antes e à época da publicação de sua obra e até o fim de sua vida.

É evidente que a *Begriffsschrift* versa sobre lógica, contudo, Frege trava nela algumas escaramuças em várias frentes com outras ciências ora citadas, ora implícitas nas entrelinhas do texto que, à primeira apreciação, aparentemente, não se configuram em alvos aos quais possam ser dirigidas quaisquer espécies de críticas. Isso caracteriza uma das principais finalidades da obra filosófica que são o diálogo e o debate constantes com outras áreas do conhecimento humano.

Frege irá, portanto, apresentar ao mundo filosófico uma nova concepção de lógica, o que implica inevitavelmente em um embate direto com a lógica aristotélica. Passemos agora à exposição da obra *Begriffsschrift* que constitui um marco na história da lógica. Obra seminal que inaugura a Lógica Moderna.



### **3.1 - Begriffsschrift: contraste entre as lógicas fregeana e aristotélica**

Frege já no prefácio denunciou que a lógica clássica se tinha deixado guiar pela gramática e a linguagem comum que, por seu turno, possui uma limitação para o objetivo de, por exemplo, exprimir proposições matemáticas que exigem maior rigor. E, por conseguinte, substituiu a organização aristotélica de sujeito e predicado pela de argumento e função, pois aquela, reitera, realiza um tratamento meramente gramatical dos juízos, ao passo que essa última estrutura apresenta uma análise rigorosamente lógica sobre os juízos, chegando ao ponto de expor e analisar da linguagem comum (*linguagem natural*) o que realmente lhe é caro, isto é, a análise do conteúdo conceitual dos juízos e suas relações estritamente lógicas, executando a defenestração do que não lhe importa. Por contraste, se Frege esforça-se por separar a lógica da psicologia, e se dá valor apenas ao conteúdo conceitual dos juízos, elemento eminentemente lógico, desprezando o que resta, por analogia, a parte a qual relega pode ser o conteúdo psicológico presente nos juízos. Vamos às palavras de Frege:

*"Na linguagem comum, o lugar do sujeito na seqüência de palavras tem a importância de um espaço distinguido onde colocamos aquilo para o qual desejamos especialmente dirigir a atenção do ouvinte (ver também § 9). Isto pode, por exemplo, ter o propósito de ressaltar uma certa relação do dado juízo a outros e deste modo fazê-lo o mais fácil para o ouvinte apreender o contexto inteiro. Agora, todas estas peculiaridades da linguagem comum que resultam somente da interação do orador e do ouvinte - como quando, por exemplo, o*

*orador toma as expectativas do ouvinte em conta e procura colocá-lo no caminho certo, mesmo antes a sentença é completada - nada tenho de responder a eles em minha linguagem formular, porque em um juízo eu considero somente aquilo que influencia sua consequência possível.”.*<sup>21</sup>

Quanto à posição de Sluga acerca da citação acima ele não somente a acompanha como também a corrobora, com outros termos, as palavras de Frege, além de confirmar a nossa conjectura:

*“Ao tentar construir tal linguagem aí surge uma distinção que permanece importante para o todo posterior desenvolvimento de Frege. Ele pensa que na declaração da linguagem comum nós devemos distinguir as intenções psicológicas e as associações do orador e do ouvinte do conteúdo objetivo real da declaração ela mesma. Depois Frege fala da ‘iluminação’ circundante de uma palavra ou sentença, o ‘colorido’ que ela possui para o orador ou ouvinte. Estes são simplesmente subjetivos, associativos, características psicológicas que não têm lugar na linguagem do pensamento puro.”.*<sup>22</sup>

É adotado por Frege um critério para descobrir qual o escopo do procedimento aritmético, i.e., até onde lhe era dado, em aritmética, progredir contando somente com inferências e o suporte das leis do pensamento as quais, segundo afirma, transcendem todos os particulares.

Agora é um momento oportuno para esclarecer duas questões básicas. A primeira, é que as leis do pensamento que irão recorrentemente ser citadas, não aparecem de forma nítida na

---

<sup>21</sup> *Idem*, p. 12.

*Begriffsschrift*, e sim em outra obra posterior de Frege, as *Grundgesetze der Arithmetik, Volumes I* de 1893 e *Volume II* de 1903. São as seguintes leis básicas: Lei de Identidade ( $A = A$ ); Lei do Terceiro excluído ( $A$  ou  $\neg A$ ); Lei de não-contradição  $\neg(A$  e  $\neg A)$ ; Lei de Bivalência (dois valores de verdade - Verdadeiro e Falso); além da única regra de inferência *Modus Ponens*.

A segunda consiste no fato do que significa o conceito de inferência. Uma definição Standard é a seguinte: o processo pelo qual da verdade de uma afirmação é afirmada a verdade de outra proposição, por vezes esse conceito é relacionado à implicação que substitui, por sua vez, o condicional ou a consequência tornando o significado generalizado.

O próximo movimento de Frege pretende realizar uma substituição do que ele chama de conceito de disposição em uma seqüência por uma consequência lógica, a fim de atingir o conceito de número. O conceito de disposição em uma seqüência parece ser uma alusão à indução matemática utilizada à sua época. Logo após, sua preocupação volta-se para as cadeias de inferências mantendo-as sem aberturas com o objetivo último de impedir a entrada de qualquer elemento intuitivo [*Anschauliches*]. Todavia, Frege depara com a limitação da linguagem que se constituiu, a princípio, numa barreira para o seu objetivo anterior.

O primeiro propósito da *Begriffsschrift* é oferecer uma prova segura da validade de qualquer cadeia de inferência a fim de que, primeiro, nenhum elemento possa entrar sem ser identificado e, segundo, que qualquer que seja sua origem possa ela ser objeto de investigação.

---

<sup>22</sup> SLUGA, Hans D. in GOTTLOB FREGE, *The Arguments of the Philosophers*. Editor: Ted Honderich,

Frege concede uma especial importância a esta definição não só ao condicionar o entendimento do que seja sua linguagem formular (*linguagem artificial*) a partir da lembrança daquela definição, como também por tê-lo levado a dar o nome de *Begriffsschrift* à sua obra.

Em seguida faz uma advertência ao dizer que sempre foi contrário ao seu pensamento conceber um conceito como a soma de suas marcas [*Merkmale*]. Observa-se que o conceito constituído pela soma de suas marcas [*Merkmale*], isto é, por suas notas características [*Merkmal*], é exatamente o conceito admitido por Kant. Já é possível notar uma nítida discrepância no que diz respeito à concepção de conceito que ambos os filósofos têm.

Como está dito acima, Kant concebe um conceito como algo no qual estão todas as notas características desse conceito. Por exemplo, ao conceito de corpo pertencem a impenetrabilidade e a extensão como notas características [*Merkmale*].

Ao contrário, para Frege o conceito é algo sob o qual caem objetos. Em outros termos, em sua concepção lógica as propriedades pertencem aos conceitos e não aos objetos. Quando dizemos que "*um cavalo existe*" sob as novas perspectiva e notações lógicas fregeanas, não falamos realmente sobre a existência de um cavalo singular, mas em vez disso, dizemos que se existe um  $x$  tal que  $x$  é um cavalo, então  $x$  é um cavalo. Essa nova concepção lógica será de fundamental importância para a solução do argumento ontológico da existência de Deus. O que é expresso, grosso modo, por esse argumento é que existe algo que é o ser mais perfeito que pode ser concebido. Ora, ao dizer isso nós estamos predicando, isto é, dizendo algo sobre o conceito "*o ser mais perfeito que pode ser*

concebido” e não propriamente de Deus. Dito em termos técnicos, Frege aponta a falha nesse argumento por tratar a existência como um conceito de primeira ordem, quando o correto seria tratá-la como um conceito de segunda ordem como deixa claro nessa passagem.

*“Por ser a existência propriedade de conceito, a prova ontológica da existência de Deus não atinge seu objetivo. Tanto quanto a existência, porém, a unicidade não é uma nota característica do conceito ‘Deus’. A unicidade não pode ser usada para a definição deste conceito, como também a solidez, comodidade e caráter espaçoso de uma cada não podem ser empregados, com pedras, argamassa e vigas, em sua construção.”<sup>23</sup>*

É destacada ainda que a forma em que são empregadas as letras na linguagem formular de Frege é similar à forma da aritmética.

Para traçar a relação entre sua *Begriffsschrift* e a linguagem comum (*Sprache des Lebens*), Frege lança mão da clássica analogia entre o olho e o microscópio. O olho é apresentado como sendo superior ao microscópio dada a multiplicidade de casos em que pode ser usado e a facilidade que encontra em adaptar-se às mais variadas situações. Ao passo que o microscópio tem sua superioridade reconhecida quando é requisitado como instrumento óptico a fim de realizar e alcançar metas científicas as quais exigem um poder maior de resolução, o que o olho não pode oferecer, demonstrando, assim, sua inferioridade para essa tarefa específica.

A utilidade da *Begriffsschrift* consiste em ser um instrumento construído apenas para os propósitos científicos, i.e., uma

---

<sup>23</sup> FREGE, J. G. Os Fundamentos da Aritmética – Uma Investigação lógico-matemática sobre o conceito de Número: Tradução de Luís H. dos Santos. OS PENSADORES, Editora Abril, São Paulo, 1974, § 53.

linguagem artificial que, em contraste com a linguagem natural, não tem outro tipo de aplicação que não seja cumprir a execução de um objetivo científico.

Uma outra passagem famosa de Frege é com relação a uma das tarefas da filosofia que consiste em quebrar o domínio que a palavra exerce sobre o espírito humano. É elucidativo tê-la na íntegra:

*"Se uma das tarefas da filosofia é quebrar a dominação da palavra sobre o espírito humano ao colocar às claras as concepções erradas que através do uso da linguagem freqüentemente quase inevitavelmente surgem acerca da relação entre conceitos e ao libertar o pensamento do que com o qual somente os meios de expressão da linguagem comum, constituída como ela é, sela, então minha conceitografia, mais desenvolvida para estes propósitos, pode tornar também útil para o filósofo."*<sup>24</sup>

A linguagem ao dar lugar, por meio de seu uso, a relações entre conceitos que ocasionam a formação de concepções errôneas é alvo das críticas de Frege, e essa atitude percorrerá algumas de suas obras até o final de sua vida. O que parece mais interessante aqui é o fato de que Frege implicitamente sugere uma análise da linguagem, que se constituirá em novas áreas (filosofia analítica e filosofia da linguagem) e um novo método dentro do domínio da filosofia que, para alguns filósofos contemporâneos, deve preceder ao estudo da própria filosofia a fim de evitar falsas questões levantadas por ela, advindas da falta de análise prévia de alguns conceitos.

---

<sup>24</sup> FREGE, G. "Begriffsschrift" in VAN HEIJENOORT, J – *From Frege to Gödel*, Cambridge, HUP, 3ª ed. 1977, p. 7.

Além disso, nosso autor reafirma veladamente a separação da lógica e da psicologia, basta lembrar das palavras, acima, de Sluga que dão conta do caráter psicológico que possui a linguagem comum que se manifesta na interação do orador e do ouvinte.

A crítica de Frege com respeito à estrutura da lógica de então e sua conseqüente radical mudança dos elementos que a compunham, representaram não só uma reforma na lógica, mas a inauguração de uma nova lógica.

A primeira atitude de Frege foi chamar a atenção para o fato de que até aquele momento a lógica estava assentada na linguagem comum e na gramática. Portanto, ela não seguira uma forma exclusivamente lógica até então, senão que se guiava por uma forma essencialmente gramatical. Sua primeira medida foi substituir os conceitos sujeito e predicado pelos de argumento e função respectivamente. Essa atitude garantirá uma mudança substantiva na análise lógica dos juízos e assegurará uma avaliação mais rigorosa quanto às provas das cadeias de inferência. Já se anuncia uma preocupação de caráter semântico no tocante à linguagem, mas, não obstante, sua preocupação continua a ser essencialmente lógica. O que podemos notar no excerto seguinte:

*"Em especial, eu acredito que a substituição dos conceitos sujeito e predicado por argumento e função, respectivamente, suportará ao teste do tempo. É fácil ver como com relação ao conteúdo como uma função de um argumento leva a formação de conceitos. Além disso, a demonstração da ligação entre o sentido das palavras se, e, não, ou, existe, algum, todo, e assim por diante, merece atenção."*<sup>25</sup>

---

<sup>25</sup> FREGE, G. "Begriffsschrift" in VAN HEIJENOORT, J – *From Frege to Gödel*, Cambridge, HUP, 3ª ed. 1977, p. 7.

O êxito dessa virada de Frege com relação à lógica aristotélica, com efeito, implica e dá início a uma nova teoria do juízo, agora não mais orientada por uma preocupação gramatical, mas lógica.

No final do prefácio Frege dá uma segunda versão do que o teria levado a sua Conceitografia:

*"Como eu observei no começo, a aritmética foi o ponto de partida para a seqüência do pensamento que levou-me a minha conceitografia."*<sup>26</sup>

E fechando-o, anuncia uma agenda de trabalho que se constituiria na publicação de sua próxima obra *Die Grundlagen der Arithmetik* de 1884, como podemos constatar nesse trecho:

*"Para proceder mais longe ao longo do caminho indicado, para elucidar o conceito de número, magnitude, e assim por diante - tudo isto seria o projeto de novas investigações, as quais eu devo publicar imediatamente depois deste livrinho."*<sup>27</sup>

---

<sup>26</sup> *Idem*, p. 8.

<sup>27</sup> *Idem*, p. 8.



### 3.2 - A notação da Begriffsschrift

Frege abre a *Begriffsschrift* definindo os sinais com os quais trabalhará nesta obra, isto é, sua notação. Estes são de dois tipos, o primeiro são letras que têm a seguinte finalidade: ou elas representam números que são deixados indeterminados ou serão funções deixadas indeterminadas. O segundo tipo são sinais que possuem seu sentido definido.

O juízo é introduzido em seguida como um traço vertical pequeno, ao passo que o traço do conteúdo é uma linha horizontal média. Nesse momento já podemos explicitar algumas peculiaridades que envolvem estes traços. Dependendo de como se apresentem e principalmente com qual finalidade, há entre eles a diferença entre expressar e afirmar.

Um conteúdo pode ser expressado se nos utilizarmos apenas do traço do conteúdo, todavia, se inserirmos o traço do juízo na extremidade esquerda do traço do conteúdo nós faremos uma afirmação desse juízo. Frege os define do seguinte modo:

*"Permita-nos chamar o traço horizontal o traço do conteúdo e o vertical o traço do juízo."*<sup>28</sup>

Frege exemplifica essa diferença entre apenas expressar ou ser assertivo, isto é, afirmar o juízo:

*"Se omitirmos o pequeno traço vertical à esquerda no final do traço horizontal, o juízo será transformado em uma simples combinação de*

*idéias [Vorstellungsverbindung], da qual o escritor não afirma se ele o reconhece como verdadeiro ou não. Por exemplo, deixe permanecer para [bedeute] o juízo 'Pólos magnéticos opostos se atraem um ao outro'; então não expressaria [ausdrücken] este juízo; é para produzir no leitor simplesmente a idéia da mútua atração dos pólos magnéticos opostos, dizer a fim de derivar conseqüências dela e para provar por meio destas se o pensamento está correto. Quando o traço vertical é omitido, nós expressamos parafraseando, usando as palavras 'a circunstância que' ou 'a proposição que'."*<sup>29</sup>

A ciência é constituída por um conjunto de proposições verdadeiras. E a relevância da distinção feita por Frege entre expressar e afirmar reside no fato de que a ciência em geral e a lógica em particular ocupam-se e buscam atingir a verdade. Porém, somente quando se afirma ou se nega algo por meio de uma proposição é possível atribuir os valores de verdade, a saber, o verdadeiro ou o falso, e isso definitivamente não ocorre somente quando a expressamos.

O autor apresenta agora a condicionalidade. O traço de condição é representado por um traço horizontal que liga os traços de conteúdo tanto de A como B. Notemos que a proposta de Frege já mostra diferenças entre sua lógica e a tradicional porque o que passa a ser analisado são os conteúdos conceituais dos juízos - quando afirmados - e não mais os conceitos dos juízos. Há também uma mudança significativa entre tais modelos, pois que o traço de condição permite estabelecer uma relação entre os conteúdos ou os

---

<sup>28</sup> FREGE, G. "Begriffsschrift" in VAN HEIJENOORT, J - *From Frege to Gödel*, Cambridge, HUP, 3ª ed. 1977, p. 12.

<sup>29</sup> *Idem*, p. 11.

juízos. Tomando *A* e *B* como conteúdos que podem eventualmente tornar-se juízos, há somente quatro possibilidades:

- (1) *A* é afirmado e *B* é afirmado;
- (2) *A* é afirmado e *B* é negado;
- (3) *A* é negado e *B* é afirmado;
- (4) *A* é negado e *B* é negado.

Frege também faz uso de uma regra de inferência que é o *Modus ponens* que diz que a única possibilidade a ser descartada como falsa tem esta forma, o antecedente é afirmado e o seu conseqüente negado, sendo as demais verdadeiras, essa é a regra do condicional. No caso acima teríamos de recusar a segunda possibilidade. O antecedente, na forma aceita pelo *Modus ponens*, tem de ser verdadeiro e o seu conseqüente também verdadeiro para que possamos concretizar a inferência, isto é, se *A* então *B* necessariamente. O condicional também pode ser conhecido como sendo uma funcional veritativa condicional que significa que a verdade expressa é uma função dos valores de verdade de *A* e *B* do condicional.

Outro aspecto importante da lógica fregeana é o seu caráter formal e sua insistente procura de um sinal que não expresse uma relação causal entre os juízos e, sim, um que exprima apenas e tão-somente uma relação lógica. Examinemos o seguinte trecho analisado por Frege numa de suas possibilidades de formação de juízo:

"(2) *B* tem de ser negado. Então o conteúdo de *A* é imaterial. Por exemplo, permita *B* ser a circunstância que o movimento perpétuo é

*possível e A a circunstância que o mundo é infinito. Então somente a segunda e a quarta dos quatro casos são possíveis. Ali não necessita existir uma ligação causal entre A e B.”.*<sup>30</sup>

A consequência ao afirmar que o conteúdo de A é imaterial é que Frege se recusa a admitir a existência de quaisquer resíduos ontológicos em sua lógica, e esse fato parece ser reforçado por sua negativa em aceitar uma ligação causal que se aplica aos fenômenos do mundo físico, i.e., a lei causal que age [wirken] sobre os objetos do mundo físico.

Frege, dito de outra maneira, quer deixar explícito que na análise que realizar acerca das sentenças, proposições e enunciados observará somente a relação lógica que se estabeleça entre eles. Na seguinte sentença “*Se sou eu Napoleão então a Lua é feita de queijo*” não importa a Frege se o antecedente e seu conseqüente são de fato verdadeiros, mas importa sim que do ponto de vista lógico trata-se de uma implicação necessária a despeito de serem ambos, antecedente e conseqüente, falsos.

Outro sinal introduzido é o de negação. Frege o define assim:

*“Eu chamo este traço vertical curto o traço da negação.”.*<sup>31</sup>

O traço de negação tem por finalidade expressar a negativa de um juízo. E também combina-se com o traço de condição. O resultado imediato da combinação com o traço do condicional ou mesmo a simples colocação do sinal de negação à frente de qualquer proposição, é a formação de outro juízo.

---

<sup>30</sup> *Idem*, p. 14.

O próximo sinal a ser inserido é o de identidade do conteúdo. Esse sinal tem a função de indicar que dois nomes têm o mesmo conteúdo conceitual. Isso equivale a dizer que o conteúdo de um juízo pode ser determinado de modos diferentes e mais, que nomes diferentes podem possuir o mesmo conteúdo.

Frege passa a falar agora sobre função e argumento, os dois conceitos que substituem, em sua concepção lógica, a estrutura sujeito e predicado da lógica aristotélica. Sobre a origem desse conceito (Cf. J. Weiner Frege, 1990, pp. 37-38.)

Frege pensa em uma circunstância em que possa, segundo afirma, em sua linguagem formular, expressar uma determinada relação entre os elementos hidrogênio e o dióxido de carbono que permita a substituição dos sinais (hidrogênio, oxigênio, nitrogênio) uns pelos outros dentro de uma expressão. Por meio da análise realizada sobre essa expressão, admitindo a possibilidade de tal alteração, o que resulta é o surgimento de dois elementos, a função e o argumento aos quais Frege dará as seguintes definições no resgate do texto desde seu início:

*"Permita-nos assumir que a circunstância de que o hidrogênio é mais leve do que o dióxido de carbono é expresso em nossa linguagem formular; podemos então substituir o sinal para hidrogênio pelo sinal para oxigênio ou aquele para nitrogênio. Isto muda o significado de tal modo que 'oxigênio' ou 'nitrogênio' estabelece as relações em que o 'hidrogênio' ficou antes. Se imaginarmos que uma expressão pode assim ser alterada, ela se decompõe em um componente estável, representando a totalidade das relações, e o sinal, considerado como substituível por outros, que denota o objeto*

---

<sup>31</sup> *Idem*, p. 17.

*permanente nestas relações. O componente anterior eu chamo uma função, o último seu argumento.”.*<sup>32</sup>

Nessa nova perspectiva, Frege tem em mãos um instrumental muito mais eficiente para a análise de sentenças e enriquecedor em seus resultados. Tomemos o próprio exemplo dado pelo autor.

*'O hidrogênio é mais leve do que o dióxido de carbono.'*

A função como parte da sentença à qual Frege atribui a característica de permanecer inalterada é *'...é mais leve do que...'* e os argumentos que, ao contrário, são substituíveis, são dois: *'hidrogênio'* e *'dióxido de carbono'*. Temos, então, uma função que deve ser preenchida por dois argumentos. A cada substituição o significado da sentença se altera e sua verdade ou falsidade dependerá da disposição dos argumentos na sentença, isto é, se os trocarmos de seus lugares anteriores, obteremos uma sentença falsa, pois não se verifica que o *'dióxido de carbono'* seja mais leve do que o *'hidrogênio'*.

Na terminologia posterior de Frege, a partir de 1891 com a publicação do artigo *"Função e Conceito"*, a função será insaturada a fim de que um argumento (objeto) a complete. Esse aspecto da lógica de Frege ficará mais claro quando falarmos sobre variáveis e quantificadores.

Ainda sobre esse tópico há uma grande importância no fato de Frege conceber uma função de dois lugares, como o exemplo acima, sobretudo para a matemática, uma vez que ele, como acabamos de ver,

---

<sup>32</sup> *Idem.*, pp. 21-22.

tenciona proporcionar uma análise lógica para a aritmética. Quem explica em minúcias não apenas a relevância de uma função de dois lugares para a matemática, mas, também, o avanço que se dá a partir desse conceito, é Weiner:

*"(...)a convicção de Frege de que as verdades da aritmética são analíticas vem, em parte, de sua convicção de que a indução matemática é uma aplicação de uma verdade geral sobre seqüências. A seqüência de números consiste de 1, o sucessor imediato de 1 (i.e. 2), o sucessor imediato de 2 (i.e. 3), etc. Se a característica fundamental desta seqüência é que ela é ordenada por uma relação de dois lugares, a relação que sustenta entre dois números quando o segundo é um (talvez não imediato) sucessor do primeiro. [...] Estas características da seqüência do número, como ordenada pela relação menor do que, podem ser expressas usando a Begriffsschrift, mas não usando a organização Aristotélica."*<sup>33</sup>

Já temos condições de fazer um exercício comparativo entre a lógica de Frege e a de Aristóteles. À primeira vista, o que depreendemos dos exemplos citados é que a lógica aristotélica não consegue oferecer um número de opções de análise que conferem à lógica fregeana mais versatilidade e flexibilidade no tratamento com as sentenças. E ao mencionar a estrutura da lógica aristotélica, se prestarmos mais atenção veremos também que ela não dá conta de sentenças que apresentam uma forma relacional, ou seja, "...mais pesado do que..." ou "...menor que...".

O exemplo mais conhecido da lógica clássica é o silogismo:

*Todo homem é mortal*

*Sócrates é homem*

---

<sup>33</sup> WEINER, Joan, in *Frege*, Past Masters, OXFORD UNIVERSITY PRESS, 1990, p. 40.

*Logo, Sócrates é mortal.*

Os problemas desse silogismo válido podem ser explicitados da forma seguinte:

- 1 - Se fizermos uma apresentação sintática de sua estrutura, ela se revelará como S é P. Um sujeito, a cópula é e o predicado, até aqui sem restrições. Essa lógica é conhecida como atributiva ou predicativa, em outros termos, todo o predicado (qualidades) é atribuído ao sujeito (uma substância).
- 2 - Quanto à cópula é em que está implícita a aceitação da existência dos sujeitos aos quais ela é empregada na lógica aristotélica há, portanto, um comprometimento ontológico para com seus silogismos por meio de uma correspondência irrevogável com o mundo, com a realidade.
- 3 - A estrutura dessa lógica mostra sua limitação em face da lógica fregeana porque essa oferece um lugar vazio que tem de ser preenchido, o lugar do sujeito que corresponde ao argumento na concepção de Frege.

Agora é abordada a Generalidade. Algumas das características desse segmento da obra são a dificuldade de entendimento do que está sendo tratado ali e o acompanhamento do raciocínio do autor. Para quem busca os quantificadores universal e existencial em suas formas mais atualizadas, não os encontrarão exatamente porque eles são o resultado posterior dessa exposição.

A grande vantagem da lógica fregeana com relação à aristotélica é em parte resultado direto da substituição de sujeito e predicado



por função e argumento e, por outra, a utilização de quantificadores e variáveis. Vejamos esse exemplo.

*"Para qualquer  $x$ , se  $x$  é uma raiz cúbica de 8 então  $x$  é a raiz de 4."*<sup>34</sup>

A variável  $x$  desempenha um papel que consiste na combinação com um quantificador a fim de expressar a generalidade. Há, portanto, a redução do emprego das palavras da linguagem comum ao máximo possível, demonstrando, dessa forma, claramente a sua simplicidade. Vejamos um contra-exemplo - não quantificado - e um exemplo - quantificado - para demonstrar a simplificação de uma afirmação quando quantificada:

*"A afirmação, sem usar variáveis, seria algo semelhante a isto: para quaisquer três coisas, se a primeira é menor do que a segunda, e a segunda é menor do que a terceira, então a primeira é menor do que a terceira. A reivindicação é muito mais clara, todavia, se ela é expressa usando as variáveis: para qualquer  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , se  $x < y$  e  $y < z$  então  $x < z$ ."*<sup>35</sup>

O uso dos quantificadores tem como finalidade estabelecer o alcance da generalidade. O exemplo anterior diz respeito ao quantificador universal do tipo, *para todo  $x$ , tal que  $Fx$  então...*

Outra afirmação da lógica expressa o quantificador existencial:

---

<sup>34</sup> WEINER, Joan, in *Frege*, Past Masters, OXFORD UNIVERSITY PRESS, 1990, p. 44.

<sup>35</sup> *Idem*, p. 45.

*"Um exemplo é: há um número que é <2".<sup>36</sup>*

Sua expressão em palavras seria: *"existe um x tal que x..."*

Com a utilização de quantificadores e variáveis, a lógica de Frege não só apresenta um meio mais adequado e satisfatório de tratar com sentenças que exprimem relação, como também consegue fixar o alcance que lhe interessa dentro das sentenças. Ao inserir uma variável *x*, que representa objetos individuais, ligada a qualquer um dos quantificadores, entende-se com isso que não será analisada a sentença em sua totalidade senão que apenas uma parte dela. Esse fato é imprescindível à matemática que se ocupa, ademais, de sentenças que apresentam a característica de transitividade, por exemplo: *se 4 é menor que 7 que, sendo esse menor que 10, então 4 é menor que 10.*

Na parte II da obra Frege irá mostrar o sucesso de sua axiomatização da lógica. Uma definição possível para a axiomatização é: todas as verdades de uma ciência mostram dependência e podem ser resumidas a poucas verdades primitivas. Esse fato que assegura a perspicuidade do sistema, ou seja, a sua evidência.

Em sua parte III Frege afirma que o pensamento puro tem seu próprio conteúdo sem necessitar de nada externo a ele:

*"(...) vemos como o pensamento puro, independente de qualquer conteúdo dado pelos sentidos ou mesmo por uma intuição a priori, pode, somente do conteúdo que resulta de sua própria constituição,*

---

<sup>36</sup> *Idem*, p. 46.

*trazer para adiante juízos que à primeira vista parecem ser possíveis somente sobre as bases de alguma intuição.”.*<sup>37</sup>

Frege pretende que a lógica seja suficiente para provar a validade de algumas inferências baseadas em propriedades que são hereditárias em seqüências ancestrais. Como por exemplo:

*“Permita que  $\Lambda(M, N)$  signifique a circunstância que  $N$  é uma criança de  $M$ ,  $\Sigma(P)$  a circunstância que  $P$  é um ser humano. Então é a circunstância que toda criança de um ser humano é por sua vez um ser humano, ou que a propriedade do ser humano é hereditária.”.*<sup>38</sup>

Ou talvez fique mais claro nesse outro exemplo:

*“Se a propriedade  $F$  é hereditária na seqüência- $f$ , se  $x$  tem a propriedade  $F$ , e se  $y$  é um resultado de uma aplicação do procedimento  $f$  para  $x$ , então  $y$  tem a propriedade  $F$ .”.*<sup>39</sup>

Essa fórmula poderia ter a seguinte configuração sintática:  
 $(x) [F(x) \rightarrow (y) (f(x, y) \rightarrow F(y))]$ . Isso equivaleria dizer que para todo objeto  $x$ , se  $x$  tem a propriedade da função  $F$ , e se  $y$  resulta de uma aplicação do procedimento  $f$  para  $x$ , então  $y$  tem a propriedade  $F$ . Por outros termos, se a função  $F$  possui a propriedade hereditária (indução matemática) e for aplicado o procedimento  $f$  para  $x$ , o próximo objeto que o suceder será seu descendente sendo o  $x$  seu ancestral.

---

<sup>37</sup> FREGE, G. “Begriffsschrift” em VAN HEIJENOORT, J – *From Frege to Gödel*, Cambridge, HUP, 3ª ed. 1977, p. 55.

<sup>38</sup> *Idem*, p. 57.

<sup>39</sup> *Idem*, p. 58.

Tomando o exemplo acima temos o  $x$  e o  $y$ , nota-se a presença da regra de inferência *modus ponens*: se  $x$  então  $y$ ;  $x$  logo  $y$ . Essa regra dá indícios de ser um dos elementos fundamentais que assegura a relação entre um antecessor e seu sucessor, o mesmo procedimento com respeito ao antecedente e seu conseqüente da regra de inferência *Modus Ponens*.

Para fazer justiça a Aristóteles é necessário dizer que ele foi o primeiro a utilizar variáveis na lógica haja vista a estrutura sintática de seus silogismos. Porém, combinar os quantificadores universal e existencial com variáveis, possibilitando determinar, como vimos, qual a parte a ser analisada em uma sentença, é obra de grande mérito de Frege.

### 3.3 - Logicismo

A tese clássica do logicismo se deixa exprimir pelo intento de reduzir a aritmética às leis lógicas.

O plano geral - programa - do logicismo que havia sido pensado por Frege teria a seguinte espinha dorsal. A apresentação de seu sistema lógico, sua *Begriffsschrift* do qual forneceria uma linguagem lógica perfeita [linguagem artificial] por meio da qual pudesse fornecer uma prova segura da validade de qualquer cadeia de inferência a fim de evitar que nenhum elemento intuitivo pudesse entrar sem ser identificado. Nos *Grundlagen* definiria o número cardinal em termos puramente lógicos, que culminaria com as *Grundgesetze* em que demonstraria formalmente a derivação da aritmética com base na lógica.

Não obstante, se quisermos fazer justiça com relação a quem primeiro pensou no logicismo, teremos que retroceder mais nossa visão até chegarmos ao ano de 1874 em que o filósofo Lotze, na segunda metade do século XIX, publica sua *Logik*.

Sluga sustenta categoricamente que Frege ficou em dívida com Lotze, por muitas outras coisas, mas, sobretudo pela idéia de logicismo:

"Entre as muitas coisas que Frege deve a Lotze, a mais importante é talvez a idéia do logicismo."<sup>40</sup>

---

<sup>40</sup> SLUGA, Hans D. in GOTTLOB FREGE, *The Arguments of the Philosophers*. Editor: Ted Honderich, London and New York, 2001, p. 57.

No entanto, o mesmo autor reconhece os méritos inegáveis de Frege ao tornar exequível tal idéia que para Lotze não passara de um programa:

*"O logicismo permanece completamente programático por Lotze, mas para Frege tornou-se a inspiração da lógica da Begriffsschrift, das reflexões dos Fundamentos da Aritmética, e do ensaio semântico de 1890."*<sup>41</sup>

---

<sup>41</sup> *Idem*, p. 58.

#### 4 - CAPÍTULO TERCEIRO COMPARAÇÃO

Neste último capítulo perseguiremos o objetivo que consiste num primeiro momento resgatar o que até aqui foi exposto acerca do tema proposto para em seguida analisá-lo de forma mais detida.

Em face do número de temas que proporcionam estas filosofias, muitos poderiam ser os caminhos adotados pelos quais chegaríamos a elas. Contudo, escolheremos a lógica como eixo para nosso exame. Essa é uma escolha que resulta natural, e se constitui em via privilegiada de acesso na medida em que a distinção entre analítico e sintético se desenvolve, em grande parte, a partir das concepções lógicas de Frege e Kant. Em grande parte porque será inevitável não fazer referência à epistemologia kantiana ao menos no que concerne ao conceito de *a priori* que desempenhará um papel fundamental em nossa exposição.

No cumprimento dessa tarefa teremos condições de aproximar ambas as perspectivas, examinando-as e pondo acento no que nelas houver de comum e divergente, por uma parte, e de contrário e consensual, por outra.

Antes de mais, devemos reafirmar que a relação mantida entre a filosofia de Kant e a lógica remonta à concepção aristotélica dessa ciência. O reconhecimento quanto a sua importância, ainda que parcial, para o desenvolvimento do conhecimento e a conseqüente reverência atribuída a ela, são expressos nos trechos seguintes do Prefácio da segunda edição da *Crítica da Razão Pura* em que fica evidenciado o fato de a lógica ter alcançado o *status* de ciência<sup>42</sup>. Contudo, Kant reconhece sua limitação.

---

<sup>42</sup> Cf. p. 18 Capítulo Primeiro dessa Dissertação.

*"Seria naturalmente muito mais difícil para a razão seguir a via segura da ciência, tendo de tratar não somente de si, mas também de objectos; eis porque, enquanto propedêutica, a lógica é apenas como a antecâmara das ciências e, tratando-se de conhecimentos, pressupõe-se, sem dúvida, uma lógica para os julgar, mas tem que procurar-se a aquisição destes nas ciências, própria e objectivamente designadas por esse nome."*<sup>43</sup>

Sob a análise da última citação revela-se o fato de que a lógica aristotélica, denominada por Kant também de tradicional, realmente não é suficiente para a construção de conhecimento, pois que esta ciência apresenta séria limitação quando instada à tarefa de produzir novos conhecimentos. Tal resultado se dá em decorrência do pensamento (entendimento) prescindir totalmente do conteúdo do conhecimento, passando a ocupar-se tão-somente consigo mesmo e com sua forma.

A constatação de que a lógica está preocupada exclusivamente com o aspecto formal do pensamento conduz-nos, então, à conclusão de que ela é de fato muito importante porque assegura ao menos a correção da parte formal do nosso conhecimento, contudo, mostra-se insuficiente para o projeto kantiano que conta entre suas finalidades com o objetivo de construir novos conhecimentos, além de demonstrar com que direito podemos nós fazer uso de conceitos a partir dos quais os constituímos, mas que, no entanto, não podem ser fundados com base apenas na experiência. De maneira implícita Kant faz aqui referência, em outros termos, às questões de direito (*quid*

---

<sup>43</sup> *Idem, B IX.*



*juris*) e de fato (*quid facti*)<sup>44</sup> que envolvem a legitimidade de nosso uso de alguns conceitos puros *a priori* do entendimento.

A matemática e a física são duas das ciências a que Kant indica que se deva buscar adquirir conhecimento. Contudo, parte delas como um *Faktum* a fim de remontar seus princípios i.e., parte da matemática e da física como ciências já constituídas para provar que suas condições de possibilidade são os juízos sintéticos *a priori*. Todavia, quer adotemo-nas como ponto de partida, quer como ponto de chegada, faz-se necessário apresentar por que Kant traça a distinção entre juízos analíticos e juízos sintéticos, diferenciação essencial para sua filosofia.

A filosofia que o precedeu, notadamente a de Leibniz e Wolff, havia acreditado ser possível obter de conhecimento fazendo uso somente da razão pura, sendo suficiente realizar uma simples análise de conceitos respeitando a sua correção lógica. Portanto, logravam alcançar um conhecimento apenas formal e nisso seguiram a rigor a lógica aristotélica cuja importância para a produção de conhecimento novo, como vimos, é nula. Vejamos o que diz a respeito o próprio Kant: "A filosofia" afirma

*de Leibniz e de Wolff indicou uma perspectiva totalmente errada a todas as investigações acerca da natureza e origem dos nossos conhecimentos, considerando apenas puramente lógica a distinção entre o sensível e o intelectual, porquanto essa diferença é, manifestamente, transcendental e não se refere tão-só à sua forma clara ou obscura, mas à origem e conteúdo desses conhecimentos. Assim, pela sensibilidade, não conhecemos apenas confusamente as coisas em si, porque não as conhecemos mesmo de modo*

---

<sup>44</sup> Cf. Crítica da Razão Pura A 84/B 117.

*algum; e se abstrairmos da nossa constituição subjetiva, não encontraremos nem poderemos encontrar em nenhuma parte o objeto representado com as qualidades que lhe conferiu a intuição sensível, porquanto é essa mesma constituição subjetiva que determina a forma do objeto enquanto fenômeno...*<sup>45</sup>

Gostaríamos de ressaltar, a título de informação a existência de mais uma fonte acessível de pesquisa que faz uma abordagem de forma clara e minuciosa acerca dos elementos que envolveram a virada kantiana em relação à tradição filosófica. M. Ariel (Cf. *A FILOSOFIA A PARTIR DE SEUS PROBLEMAS* pp. 107-127).

---

<sup>45</sup> KANT, I. *Crítica da Razão Pura em Serviço de Educação* Fundação Calouste Gulbenkian. Tradução de Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. Lisboa, 1997. A 44/B 62.

#### 4.1 - Juízos analíticos em Kant e Frege

A distinção entre os juízos analíticos e sintéticos na *Crítica da Razão Pura*, como vimos, é exposta da forma seguinte. A relação entre sujeito e predicado, dentro de um juízo, pode se dar de dois modos.

- 1) Ou o predicado B pertence ao sujeito A como que contido nesse sujeito A, embora implicitamente (juízo analítico);
- 2) ou o predicado B está totalmente fora do sujeito A ainda que mantendo-se ligados (juízo sintético).<sup>46</sup>

Kant ainda os caracteriza de juízos *explicativos* e *extensivos*, como segue:

*"Portanto, os juízos (os afirmativos) são analíticos quando a ligação do sujeito com o predicado é pensada por identidade; aqueles, porém, em que essa ligação é pensada sem identidade, deverão chamar-se juízos sintéticos. Os primeiros poderiam igualmente denominar-se juízos explicativos; os segundos, juízos extensivos; porque naqueles o predicado nada acrescenta ao conceito do sujeito e apenas pela análise o decompõe nos conceitos parciais, que já nele estavam pensados (embora confusamente); ao passo que os outros juízos, pelo contrário, acrescentam ao conceito de sujeito um predicado que nele não estava pensado e dele não podia ser extraído por qualquer decomposição."*<sup>47</sup>

---

<sup>46</sup> Cf. quinta nota de rodapé dessa dissertação.

<sup>47</sup> KANT, I. *Crítica da Razão Pura* em Serviço de Educação Fundação Calouste Gulbenkian. Tradução de Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. Lisboa, 1997. A 7/B 11.

Atinente ainda à natureza dos juízos analíticos é preciso dizer que o princípio supremo sobre o qual apóiam-se é o princípio de contradição, mas que se aplica a todos os conhecimentos uma vez que não pode ser contrariado por nenhum deles. Kant o apresenta nos termos seguintes:

*"(...)o princípio de contradição é o princípio universal e plenamente suficiente de todo o conhecimento analítico; mas a sua autoridade e utilidade não vão mais longe como critério suficiente de verdade. Efetivamente, este princípio é uma conditio | sine qua non, porque nenhum conhecimento pode contrariá-lo, sem se aniquilar a si mesmo, mas não é um fundamento determinante da verdade do nosso conhecimento."*<sup>48</sup>

A posição fregeana com respeito à maneira com que Kant define os juízos analíticos e sintéticos é essencialmente oposta. No terceiro parágrafo de sua obra, *Os Fundamentos da Aritmética*, concede um novo tratamento dos conceitos kantianos, os dois primeiros pertencentes à esfera epistemologia e os últimos à lógica, são eles, *a priori* e *a posteriori*, sintético e analítico. Em contraste com a organização kantiana que se utiliza, como já foi destacado, da análise dos conteúdos dos juízos para classificá-los em analítico e sintético, Frege submete todos a um critério eminentemente lógico, isto é, a definição desses conceitos dependerá apenas e tão-somente do grau de sua generalidade lógica.

Contrariamente a esse processo, Frege parte não do conteúdo de uma proposição, mas de sua demonstração e retrocede às verdades primitivas que as justificam. Se no percurso houver apenas leis

lógicas e definições, então a verdade é analítica. A proposição é sintética se para sua prova necessitarmos somente de verdades que não possuam natureza lógica geral, mas façam referência a uma ciência particular. A verdade *a posteriori* é assim definida se para sustentar sua demonstração haja o auxílio das questões de fato, que por sua vez são verdades indemonstráveis e não possuem generalidade. E, por fim, uma verdade *a priori* é aquela que podemos levar a efeito sua demonstração tão-somente com leis gerais que por sua natureza não admitam nem necessitem ser demonstradas.

Ao assumir essa posição Frege rechaça a caracterização kantiana segundo a qual um juízo é analítico se o predicado B estiver contido no conceito do sujeito A, e sintético se se verificar o contrário, porque esta espécie de definição baseia-se exatamente na estrutura sujeito-predicado do juízo. Isto posto, vejamos como o autor os define:

*"Agora depende de encontrar uma prova e recuar para as verdades primitivas. Se, no caminho, somente leis lógicas gerais e definições são encontradas, então a verdade é analítica, supondo que as proposições sobre as quais a admissibilidade de qualquer definição seja também levada em conta."*<sup>49</sup>

*"Se não é possível proporcionar a prova, todavia, sem usar verdades que não são de natureza lógica geral, mas pertencem em vez disso ao domínio de uma ciência particular, então a proposição é sintética."*<sup>50</sup>

---

<sup>48</sup> *Idem A 152/ B 191.*

<sup>49</sup> *Idem, p. 93*

<sup>50</sup> *Idem, p. 93*

"Para que uma verdade seja a posteriori, deve ser impossível para sua prova evitar apelo aos fatos, isto é, verdades indemonstráveis e sem generalidade, contendo afirmações sobre objetos particulares."<sup>51</sup>

"Se, por um lado, é possível proporcionar uma prova de leis gerais completamente, as quais nem necessitem nem admitam prova, então a verdade é a priori."<sup>52</sup>

Primeiro, ele não fala mais em juízos, mas em verdades, e o segundo ponto diz respeito à proposição sintética que à exceção das demais não é designada por Frege como verdade.

Note-se, além disso, que Frege emprega o termo demonstração [prova] e ao caracterizar verdade analítica e verdade a priori à primeira faz assentar em leis lógicas gerais e definições e a última em leis gerais que não necessitam nem admitem prova [axiomas]. O propósito implícito de Frege é tornar possível a axiomatização da aritmética avançando de um conjunto reduzido de verdades primitivas a partir do qual pudesse derivar as proposições aritméticas em uma cadeia de inferência; e nisso segue o espírito de sua *Begriffsschrift*.

Kant sustenta a tese de que a matemática assenta em juízos sintéticos ao contrário do que havia sido pensado pelos analistas, a saber, que os juízos matemáticos são analíticos.

A partir da proposição  $7 + 5 = 12$  Kant argumenta no seguinte sentido. Ela não pode ser analítica porque não é resultado da aplicação do princípio de contradição ao conceito da soma de sete e de cinco. Em outros termos, ao analisar o conceito da soma dos dois

---

<sup>51</sup> *Idem*, p. 93

<sup>52</sup> *Idem*, p. 93

números sete e cinco nada é encontrado a não ser a união desses números. E, portanto, o conceito do número doze não é alcançado pela análise do conceito da soma daqueles números.

Há a necessidade do auxílio da intuição para que possamos passar de um a outro conceito, isto é, partindo do número sete e adicionando a este uma a uma as unidades correspondentes ao número cinco, só assim poder-se-á alcançar o número doze que é o resultado do acréscimo (soma) das unidades.

Ao acompanharmos com atenção o relato e a argumentação feitos por Kant com relação aos seus juízos notamos que ele, por um lado, reitera a insuficiência dos juízos analíticos para o alargamento do conhecimento na medida em que nega que a ciência matemática repouse sobre a base desses juízos e, por outro, se vê preso à concepção aristotélica da lógica que realiza a análise conceitual do conteúdo tanto dos juízos analíticos quanto dos sintéticos com base na estrutura sujeito-predicado. Não obstante, acentua não só a importância da intuição como também sua necessidade e única possibilidade de passagem de um conceito ao outro realizando, assim, sua síntese.

Poder-se-ia, por vezes, ter ora uma impressão de circularidade na argumentação, ora de ambigüidade de Kant com respeito a essa concepção lógica. Caberia naturalmente a pergunta. Ora, uma vez consciente da limitação dos juízos analíticos, e Kant o é, por que não abandoná-los?

A resposta a esse questionamento legítimo está diretamente vinculada à noção de *a priori* que desempenha um papel fundamental na filosofia de Kant.

Os juízos analíticos são *a priori*, i.e., independentes da experiência, o que confere necessidade e universalidade para a constituição do conhecimento que são de importância capital, pois não se pode querer fundar o conhecimento na experiência que é apenas contingente.

Kant está em face de um problema intrincado, pois que não pode abrir mão do elemento *a priori* que lhe fornece e assegura necessidade e universalidade ao conhecimento, contudo, precisa do concurso da experiência sem o qual aquele não se desenvolve. E resulta indubitável que, do ponto de vista kantiano, os juízos sintéticos *a priori* são os juízos mais valiosos e importantes para a ciência.

Grande parte se não toda desvalorização de Kant com respeito aos juízos analíticos se deve a sua convicção de que eles são idênticos e, em consequência disso, são triviais como deixa ver nessa passagem:

*"Que quantidades iguais somadas a quantidades iguais, ou delas subtraídas, dêem quantidades iguais, são proposições analíticas, porque e tenho consciência imediata da identidade | da produção de uma grandeza e da outra; os axiomas, porém, devem ser proposições sintéticas a priori."*<sup>53</sup>

Kant, sabemos, faz repousar a matemática em juízos sintéticos *a priori* o que evidentemente, por contraste, significa que os juízos analíticos não servem ao propósito de alargamento do conhecimento, isto é, não tornam as proposições matemáticas informativas. Muitos são os fatores que conduzem Kant a essa perspectiva como, por

---

<sup>53</sup> KANT, I. *Crítica da Razão Pura em Serviço de Educação* Fundação Calouste Gulbenkian. Tradução de Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. Lisboa, 1997. A 164/B 205.



exemplo, o caráter construtivo de sua filosofia que tem a intuição como elemento fundamental para essa empresa. É o que deixa claro o excerto seguinte:

*"O conhecimento filosófico é o conhecimento racional por conceitos, o conhecimento matemático, por construção de conceitos. Porém, construir um conceito significa apresentar a priori a intuição que lhe corresponde. Para a construção de um conceito exige-se, portanto, uma intuição não empírica que, conseqüentemente, como intuição é um objecto singular, mas como construção de um conceito (de uma representação geral), nem por isso deve deixar de exprimir qualquer coisa que valha universalmente na representação, para todas as intuições possíveis que pertencem ao mesmo conceito."*<sup>54</sup>

A idéia subjacente aqui e que joga um papel fundamental na importância do elemento *a priori* no pensamento kantiano é a concepção aristotélica de ciência da qual Kant foi adepto até o fim de sua vida, qual seja, a ciência é conhecimento universal e necessário. Portanto, resulta inevitável e indissociável a vinculação entre o pensamento kantiano e o conceito de *a priori*.

Diferentemente de Kant, para Frege os juízos analíticos não são meramente juízos de identidade. Agora, ao derivá-los de leis lógicas gerais e de definições, proporcionam o surgimento de novas proposições o que seria improvável partindo da concepção kantiana. Frege fornece um exemplo<sup>55</sup> de como os juízos analíticos, em oposição ao que sustentava Kant acerca de sua trivialidade, são proveitosos.

---

<sup>54</sup> KANT, I. *Crítica da Razão Pura em Serviço de Educação* Fundação Calouste Gulbenkian. Tradução de Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. Lisboa, 1997. A 713/B 741.

<sup>55</sup> Cf. FREGE, J. G. *Os Fundamentos da Aritmética – Uma Investigação lógico-matemática sobre o conceito de Número*: Tradução de Luís H. dos Santos. OS PENSADORES, Editora Abril, São Paulo, 1974, § 17.

Portanto, se a aritmética é analítica *a priori* e, pela nova definição fregeana uma verdade *a priori* é obtida de leis lógicas, então a aritmética deve ser derivada de leis lógicas gerais; aqui reside a natureza de sua aprioridade.

Antes de continuarmos com a exposição, é necessário fazer referência, no que tange à noção de igualdade<sup>56</sup> aplicada aos juízos, a dois escritos de Frege que tratam dessa matéria. São eles, a *Begriffsschrift* e *Über Sinn und Bedeutung*.

Frege assume a igualdade, na *Begriffsschrift*, como uma relação entre nomes ou sinais de objetos, isto é,  $a = b$  quer dizer que os nomes ou sinais 'a' e 'b' têm o mesmo conteúdo conceitual. Ora, se a igualdade fosse entendida como uma relação entre objetos<sup>57</sup>, expressaria a relação de uma coisa consigo mesma, por exemplo,  $a = a$  e, de fato, não constituiria avanço algum em nosso conhecimento. E aqui reside a trivialidade à qual Kant atribuía aos juízos de identidade. Contudo, Frege só irá solucionar esse problema sobre a trivialidade apresentada pela relação de identidade em seu artigo *Über Sinn und Bedeutung*.

Nesse artigo Frege realiza uma mudança substantiva com respeito à sua posição na *Begriffsschrift* ao separar o conteúdo conceitual em sentido e referência.<sup>58</sup> Vejamos os exemplos que se seguem:

"A referência de 'Estrela da Tarde' e 'Estrela da Manhã' seria a mesma, mas não o sentido."<sup>59</sup>

<sup>56</sup> O autor concebe a relação de igualdade no sentido de identidade, isto é, de " $\varphi$  ser o mesmo que  $\lambda$ ".

<sup>57</sup> É importante ressaltar que Frege muda da posição assumida na *Begriffsschrift* com respeito à relação de identidade. Agora sustenta ser a relação não entre nomes ou sinais senão que entre objetos. Não obstante, objeto aqui tem de ser entendido como o valor de verdade, a saber, o Verdadeiro e o Falso.

<sup>58</sup> Frege fornece muitas outras definições para sentido e referência ao longo do artigo. Em nome da brevidade serão adotados sem, contudo, comprometer a explanação da questão, *pensamento* e *valor de verdade* (o Verdadeiro e o Falso) a fim de designarem, respectivamente, sentido e referência.

*"'a Estrela da Manhã é um corpo iluminado pelo sol' é diferente do da sentença 'a Estrela da Tarde é um corpo iluminado pelo sol'. Alguém que não soubesse que a Estrela da Tarde é a Estrela da Manhã poderia sustentar um pensamento como verdadeiro e o outro como falso."*<sup>60</sup>

Esses exemplos acima citados são analisados, a partir dessa nova perspectiva do autor, no primeiro, como sendo a referência tanto de '*Estrela da Tarde*' como de '*Estrela da Manhã*' o planeta Vênus. Porém, o pensamento, isto é, o modo de designar o objeto Vênus é diferente. Para Frege o segundo exemplo apresenta duas sentenças que possuem valores cognitivos diferentes, pois que os modos de designar o objeto (os pensamentos) diferem, todavia, a referência é a mesma.

É pertinente destacar a relevância da referência, primeiro, na busca da verdade. Segundo, porque expõe a insuficiência do conteúdo conceitual das sentenças na tentativa de resolver a questão da igualdade, o que força a Frege abandonar àquele ponto de vista defendido na *Begriffsschrift*. E, em terceiro lugar, que à ciência, como Frege a entende, é imprescindível captarmos o pensamento, o sentido das sentenças, mas, contudo, não é o suficiente para o conhecimento e o estabelecimento das proposições científicas. Vejamos o que nos diz o autor.

*"Mas por que queremos que cada nome próprio tenha, não apenas um sentido, mas também uma referência? Por que o pensamento não nos é*

---

<sup>59</sup> FREGE, J. G. *On Sinn and Bedeutung in The Frege Reader*, Blackwell Publishers, Ltd. Edited by M. Beaney p. 152.

*suficiente? Porque estamos preocupados com seu valor de verdade (...) É, pois, a busca da verdade, onde quer que seja, o que nos dirige do sentido para a referência.”<sup>61</sup>*

Portanto, Frege não apenas supera-se com respeito ao conteúdo conceitual, na *Begriffsschrift*, como também à posição de Kant com respeito à trivialidade que atribuiu às sentenças de igualdade.

*“Se, em geral, julgamos que o valor cognitivo de 'a = a' e 'a = b' é diverso, isto se explica pelo fato de que, para determinar o valor cognitivo, é tão relevante o sentido da sentença, isto é, o pensamento por ela expresso, quanto sua referência, a saber, seu valor de verdade.”<sup>62</sup>*

Outra objeção suscitada por Frege contra a presença da intuição na demonstração matemática advém da natureza dos números expressa no parágrafo 10 dos *Fundamentos*:

*“Isto não ocorre aqui, por não serem os números espaciais e temporais. As posições na série dos números não equivalem aos lugares do espaço. Os números comportam-se também de modo completamente diferente que os indivíduos, digamos, de uma espécie animal, pois possuem por natureza uma hierarquia determinada, pois cada um é formado de maneira peculiar e possui características peculiares, o que é particularmente evidente no caso do 0, do 1 e do 2.”<sup>63</sup>*

---

<sup>60</sup> *Idem*, p. 156.

<sup>61</sup> *Idem*, p. 157.

<sup>62</sup> *Idem*, p. 170.

Por serem os números objetos, mas estarem fora dos domínios do espaço e do tempo, segundo mantém Frege, a concepção kantiana não se sustenta uma vez que o espaço e o tempo, como sabemos, são as formas essenciais da intuição, e sobretudo porque para Kant os objetos nos são dados, nos afetam e são constituídos pelas intuições de espaço e de tempo como atesta a seguinte passagem.

*"A faculdade de intuição sensível é propriamente apenas uma simples receptividade que nos torna capazes de ser afectados de certo modo por representações cuja relação recíproca é uma intuição pura do espaço e do tempo (meras formas da nossa sensibilidade), e que se denominam objectos, na medida em que são ligadas e determináveis nessa relação (no espaço e no tempo) segundo leis da unidade da experiência."*<sup>64</sup>

Uma explicação precisa da recusa de Frege em aceitar os juízos sintéticos *a priori* propostos por Kant como fundamento da aritmética é dada por Burge, e resgata em certa medida o ponto central dessa divergência, a saber, o modo como cada um concebe os fundamentos do *a priori*. Diz Burge:

*"A aprioridade na matemática para Kant depende da construção possível envolvendo uma faculdade, intuição pura, que não contribui diretamente com componentes de verdades, o componente conceitual de proposições ou pensamentos. Segundo Kant, a prova em aritmética e geometria não é puramente seqüências de proposições (...) a justificação de ambas apóia-se em construções imaginativas da*

---

<sup>63</sup> FREGE, J. G. Os Fundamentos da Aritmética – Uma Investigação lógico-matemática sobre o conceito de Número: Tradução de Luís H. dos Santos. OS PENSADORES, Editora Abril, São Paulo, 1974, § 10.

*intuição pura, que não podem ser reduzidas à seqüência de verdades (...) não parte de uma ordem eterna de conteúdos conceituais. A prova mesma essencialmente implica atividade mental e produz referência essencial, através da intuição, para particulares.”<sup>65</sup>*

Em síntese, se se parte da epistemologia, assim como o fez Kant, não se pode prescindir do caráter universal e necessário que o elemento *a priori* fornece, todavia, ao adotar leis lógicas para a definição de verdades *a priori*, posição assumida por Frege, tem-se a generalidade lógica como fundamento. Frege ao escolher um critério lógico para a redefinição dos conceitos kantianos elimina toda e qualquer referência às categorias epistemológicas pelo menos como se lhes apresentavam as de Kant à sua época.

Kenny confirma que o novo critério do qual Frege se utiliza a fim de fornecer um relato lógico e por isso mais rigoroso, dos conceitos que toma de Kant, supõe a generalidade lógica. “Nós temos lido”, sustenta Kenny

*“esta passagem cuidadosamente se estivermos vendo o que, para Frege, é a diferença entre a distinção do a priori/a posteriori e a distinção entre o analítico/sintético. Não é mais um assunto de epistemologia versus lógica: é uma matéria de grau de generalidade. Uma verdade é a priori se ela é provável de leis gerais, sem apelar aos fatos particulares; uma verdade não é somente a priori, mas também analítica, se as leis gerais das quais ela é provável são leis gerais da lógica. Uma lei é uma lei da lógica se ela é*

---

<sup>64</sup> KANT, I. *Crítica da Razão Pura em Serviço de Educação* Fundação Calouste Gulbenkian. Tradução de Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. Lisboa, 1997. A 494/B 522.

<sup>65</sup> BURGE, T. *Frege on Apriority*, in *New Essays on the A Priori*. Oxford: Clarendon Press, 2000, p. 19.

*universalmente aplicável e não restrita às disciplinas particulares.”<sup>66</sup>*

O autor tem corroboradas as suas pelas próprias palavras de Frege sobre a natureza do critério adotado para a redefinição dos conceitos de Kant.

*“Dever-se-ia pensar que as fórmulas numéricas são sintéticas ou analíticas, a posteriori ou a priori, conforme o sejam as leis gerais sobre as quais se assenta sua demonstração.”<sup>67</sup>*

A perspectiva de Frege é oposta à de Kant na medida em que não pretende construir o conhecimento matemático senão derivar as proposições aritméticas a partir de leis e definições lógicas, o que corresponde ao seu projeto logicista. Portanto, para quem como Frege busca tal objetivo, não são apenas dispensáveis como também indesejáveis juízos sintéticos *a priori* na matemática porque a intuição pressuposta por essa classe de juízos, embora *a priori*, não faz parte da lógica.

---

<sup>66</sup> KENNY, Anthony, in *FREGE*, Penguin Books, England, 1995, p. 57.

#### 4.2 - Aprioridade

A diferença crucial da concepção fregeana de aprioridade com relação à kantiana é, por uma parte, o apelo às leis lógicas gerais ao menos no que diz respeito à fundamentação da aritmética, uma vez que em geometria Frege segue Kant ao reconhecer a existência de verdades que são *a priori*, mas de natureza sintética, portanto, não de origem lógica. Por outra parte, o que sustenta a noção de aprioridade de Kant é o caráter de universalidade e necessidade alcançado pelo modo como se obtém conhecimento. Portanto, a concepção kantiana de aprioridade tem um caráter notadamente epistemológico. Para tal constatação é suficiente recordar a clássica passagem sobre a distinção entre o conhecimento *a priori* e *a posteriori* exposta na Introdução da *Crítica* na qual Kant afirma que todo o nosso conhecimento começa com a experiência, contudo, isso não equivale a dizer que todo ele seja ou tenha sido derivado dela (Cf. B1-2).

Kant utiliza-se da contraposição à experiência a fim de definir o conhecimento como *a priori*, se independente dela, ou *a posteriori*, se extraído da própria experiência<sup>67</sup>. Os conceitos de *a priori* e *a posteriori*, então, são obtidos a partir do modo como obtemos conhecimento.

Portanto, a concepção de aprioridade de Kant parte de uma característica epistêmica e fundamenta-se em última instância na capacidade cognitiva que o sujeito possui para alcançar o conhecimento e conceder-lhe validade.

---

<sup>67</sup> FREGE, J. G. Os Fundamentos da Aritmética – Uma Investigação lógico-matemática sobre o conceito de Número: Trad. de Luís H. dos Santos. OS PENSADORES, Ed. Abril, São Paulo, 1974, § 7.

<sup>68</sup> Cf. Prolegômenos, 1987. § 5.



Burge sustenta em seu ensaio *Frege On Apriority* exatamente esse aspecto cognitivo que radica na atividade mental do sujeito, encontrado em Kant, que lhe serve de base para a sua definição de aprioridade. Como ressalta Burge

*"A cognição a priori é para Kant a cognição cujos recursos justificacionais derivam puramente da função de capacidades cognitivas em contribuir para a cognição. O emprego a priori de conceitos (outras representações) é o emprego que leva uma garantia de que é independente das experiências sensórias. A cognição a posteriori é a cognição que é derivativa justificacional, em parte, do sentido da experiência."*<sup>69</sup>

Como já sinalizava Frege, sua noção de aprioridade não assenta em uma divisão baseada em noções epistemológicas, ao menos não como as de Kant, mas em leis gerais ou ainda em axiomas que não admitem nem necessitam ser demonstrados.

### 4.3 – Juízos sintéticos a priori em Frege e Kant

Frege mantém uma posição contrária com respeito aos juízos sintéticos *a priori* aplicados à matemática uma vez que os aceita como fundamento apenas e tão-somente na geometria. Aqui ele está de acordo com Kant, pois as verdades da geometria são *a priori* e repousam sobre a intuição. Uma objeção possível e natural seria perguntar por que Frege admite os juízos sintéticos *a priori* na geometria e não na aritmética.

Há basicamente duas respostas que podem ser oferecidas a tal indagação. Primeiramente, à tese principal do logicismo que previa a redutibilidade da aritmética à lógica não conviriam juízos que não tivessem natureza puramente lógica como é o caso dos sintéticos *a priori* que não só pressupõem a intuição como dependem essencialmente dela a fim de construir seus objetos. E, em segundo lugar, a natureza da geometria que ao contrário da aritmética em que seus objetos, os números, têm cada um a sua peculiaridade, e que exigem por isso cada um uma definição particular, os objetos dos quais se ocupa a geometria, a saber, os pontos, retas, curvas, planos podem permanecer juntos em um nível homogêneo que é rompido apenas quando são apreendidos em uma intuição. Vejamos como o próprio autor se pronuncia acerca dessa questão:

*"Vários pontos, retas, planos podem distinguir-se apenas quando apreendidos simultaneamente em uma intuição. Se em geometria leis gerais são obtidas a partir da intuição, isto explica-se pelo fato de que os pontos, retas e planos intuídos não são propriamente*

---

<sup>69</sup> BURGE, T. *Frege on Apriority*, in *New Essays on the A Priori*. Oxford: Clarendon Press, 2000, p. 18.

*particulares, podendo por isso valer como representantes de toda sua espécie. Isto não ocorre no caso dos números: cada um tem sua peculiaridade. Em que medida um número determinado pode representar todos os outros, e em que momento sua particularidade se faz valer, é algo que não se pode dizer de antemão.”*<sup>70</sup>

Frege no parágrafo 14 dos *Fundamentos da Aritmética* define o escopo tanto da aritmética quando da geometria do seguinte modo:

*“(...) Do ponto de vista do pensamento conceitual, pode-se sempre assumir o contrário deste ou daquele axioma geométrico, sem incorrer em contradições ao serem feitas deduções a partir de tais assunções contraditórias com a intuição. Esta possibilidade mostra que os axiomas geométricos são independentes entre si e em relação às leis lógicas primitivas, e portanto sintéticos. (...) O fundamento da aritmética não é mais profundo que o de todo saber empírico, mais profundo mesmo que o da geometria? As verdades aritméticas governam o domínio do enumerável. Este é o mais inclusivo; pois não lhe pertence apenas o efetivamente real, não apenas o intuível, mas todo o pensável. Não deveriam portanto as leis dos números manter com as do pensamento a mais íntima das conexões?”*<sup>71</sup>

No trecho acima há claramente uma vez mais a indicação do maior grau de generalidade entre os fundamentos da aritmética e os de outras ciências, no caso em questão, a geometria. Ao passo que a esfera, o domínio sobre os quais incidem as leis da geometria que são o espacial e o intuível, as leis da aritmética se aplicam a todo o pensável o que lhe confere maior alcance. O acordo que há entre

---

<sup>70</sup> *Idem*, § 13.

<sup>71</sup> *Idem* § 14.

Kant e Frege no tocante à geometria é expresso por Burge, ele salienta que:

*"Frege aceita a doutrina de Kant de que a geometria Euclideana é sintética a priori. Frege entende por 'sintético' aqui não derivável da lógica. Ele também mantém com Kant que a geometria repousa na intuição espacial geométrica."*<sup>72</sup>

A filiação de Frege aos juízos sintéticos *a priori* kantianos na geometria revela não só vários pontos de convergência entre ambos, ademais, explicita interesses comuns que os ligam mais estreitamente do que se possa pensar. O que se segue é a tentativa de lançar luz sobre essa suposição. Para tanto, faremos referências às geometrias não-Euclidianas e à figura de David Hilbert que serão de valor inestimável para nosso objetivo.

---

<sup>72</sup> BURGE, T. *Frege on Apriority*, in *New Essays on the A Priori*. Oxford: Clarendon Press, 2000, p. 29.

#### **4.4 - Frege e Kant e as Geometrias euclidiana e não-Euclidiana**

A ciência do espaço, isto é, a geometria, ocupou um papel central na crise que envolveu os fundamentos da matemática no século XIX. Uma das obras de Euclides, a mais amplamente difundida, *Os Elementos*, se tornou o paradigma de método a ser seguido no âmbito científico que perdurou até meados deste período.

A geometria euclidiana [geometria plana], como ficou conhecida, consistia num sistema axiomático-dedutivo do qual, a partir de um pequeno número de axiomas admitidos sem demonstração por força de sua auto-evidência, eram derivadas as proposições válidas deste mesmo sistema. São muitos os traços de sua influência facilmente identificáveis em obras importantes de diversas áreas como, por exemplo, o *Discurso do Método* de Descartes, a *Ética* de Spinoza - além de seu *Tratado da correção do intelecto* - e a *Óptica* de Newton que seguem o método geométrico.

Porém, excetuados os caracteres lógicos e rigorosos desse sistema, qualidades que asseguraram durante mais de dois milênios o forte predomínio no campo da ciência, desde a Antigüidade, uma das proposições de Euclides já atraía, especialmente para si, a suspeição de alguns dos contemporâneos de seu autor, no que concernia a sua principal característica, a saber, sua auto-evidência.

O V postulado, freqüentemente designado como o postulado das paralelas, pode ser assim enunciado: *Por um ponto C fora de uma reta dada AB há uma e somente uma paralela para uma reta dada.*

Gauss que viveu entre as duas segundas metades dos séculos XVIII e XIX, considerado o maior matemático de seu tempo,

compartilhava igualmente da idéia a respeito da falta de evidência que pesava em especial sobre essa proposição. Esse foi o motivo que o levou a admitir que este postulado fosse, realmente, independente dos demais, além de estimulá-lo a pesquisar a possibilidade da existência de uma geometria distinta da euclidiana.

Não há certeza quanto ao que teria dissuadido a Gauss de publicar, em vida, o resultado alcançado com suas pesquisas visto que, já em 1820 apresentava parte desenvolvida de uma geometria não assente no postulado das paralelas. Assim, coube, então, à descoberta das geometrias não-Euclidianas a Bolyai, Lobachevski e posteriormente Riemann.

Não é nosso desígnio tratar em pormenor as geometrias não-Euclidianas, visto não se constituir diretamente em nosso objeto de análise, entretanto, julgamos ser necessária uma rápida abordagem do tema, pois será de grande utilidade para nossa exposição não apenas por manter ligações relevantes como, também, indissociáveis, com o propósito do presente trabalho.

As geometrias não-Euclidianas vieram à luz como resultado do esforço por parte de alguns matemáticos em tentar demonstrar o V postulado de Euclides pela razão já manifestada.

O problema pode ser expresso deste modo: para pôr à prova a força da evidência do V postulado, seria preciso demonstrá-lo, isto é, em substituição a este se assumiria um outro ou mesmo outros postulados que negasse as exigências impostas por Euclides. Se ele realmente fosse uma derivação lógica e necessária dos demais axiomas, então, certamente as geometrias que daí pudessem ser criadas revelar-se-iam inconsistentes logicamente. Portanto,

permaneceria indemonstrável e sua auto-evidência por algum tempo deixaria de ser questionada.

Uma parte desse projeto foi atingida no sentido da expectativa de Gauss, pois que o V postulado se houve independente dos demais. Dito de outro modo, por mais de dois mil anos pensou-se tratar de um teorema quando, em realidade, sempre fora um axioma.

Além disso, o fato decisivo a mergulhar a matemática em uma crise que exigia um processo de reavaliação dessa ciência e, conseqüentemente, impunha urgente reformulação acerca de seus alicerces, foi o resultado obtido com a negação do V postulado por outros distintos. A partir disso, surgiram novas geometrias, portanto, geometrias não-Euclidianas, que apresentavam uma inovação demolidora. Eram, em suas estruturas internas, logicamente consistentes<sup>73</sup>.

Eis o primeiro ponto a ser considerado imediatamente ao resultado alcançado: as geometrias não-Euclidianas são logicamente tão válidas quanto à euclidiana. Portanto, é legítimo afirmar que a última não é logicamente necessária, pois que as primeiras são a prova concreta e irrefutável, ao menos no aspecto lógico, de que o contrário não redundava em contradição alguma. Aqui joga um papel fundamental a distinção kantiana de possibilidade real e lógica e em particular a diferença entre pensar e conhecer<sup>74</sup>. Analogamente e com base nisso, podemos dizer que as geometrias não-Euclidianas são matematicamente possíveis, contudo, fisicamente (realmente) pouco

---

<sup>73</sup> A garantia de consistência lógica interna de quaisquer sistemas formais só logrou êxito até o aparecimento dos teoremas de Gödel. Desde então, a crença na coerência desses sistemas, ficou abalada e os cientistas tiveram de realizar um esforço, a partir de modelos de cálculo, com o intuito de evitar contradições em seu interior.

<sup>74</sup> Cf. B XXVI.

prováveis<sup>75</sup>. E na opinião de Friedman, as geometrias não-Euclidianas não refutam a concepção transcendental da filosofia kantiana.

*"...a existência de sistemas consistentes da geometria não-Euclidiana não somente falham decisivamente em refutar a concepção da matemática, e realmente conforma perfeitamente com aquela concepção e de fato proporciona confirmação rigorosa à perspectiva de Kant. Pois a existência de tais sistemas mostra precisamente que a geometria Euclidiana não é logicamente necessária e que há de fato espaços logicamente possíveis que não satisfazem os axiomas de Euclides<sup>76</sup>..."*

O aparecimento das geometrias não-Euclidianas abalou a convicção e a crença não primeiramente na possibilidade, mas, antes, na impossibilidade de uma geometria que não fosse a de Euclides. Saccheri seguramente foi um a sucumbir à forte ascendência da geometria euclidiana.

A Análise, que havia pautado seu procedimento no rigor demonstrativo da geometria, vê seus fundamentos comprometidos. Se o poder intuitivo advindo da auto-evidência da verdade das proposições geométricas era o elemento que servia de auxílio aos matemáticos, e essa mesma auto-evidência mostra-se duvidosa, então, é forçoso reconsiderá-lo, por um lado, ao mesmo tempo em que, por outro, empreenda-se a busca de bases mais sólidas e seguras a fim de que possa assegurar sua reconstrução.

Todo esse movimento culmina inevitavelmente não só no abandono da intuição como fundamento para a matemática, bem como e,

---

<sup>75</sup> A bem da verdade é necessário dizer que tal posição pode ser contestada a medida que dentro de alguns modelos que tenham as características de uma geometria não-Euclidiana, realizar experiências fisicamente



sobretudo, a sua total extirpação dessa ciência. O que acaba por deixar em suspenso o estatuto da geometria como ciência.

Este é, num plano geral, o contexto em que esta verdadeira revolução teve lugar, e nos cabe a partir de agora realizar a abordagem e a análise das conseqüências no trabalho de alguns filósofos ora em sentido prospectivo como é o caso de Frege, ora em retrospectiva com referência a Kant.

Frege participou ativa e efetivamente do movimento que impôs à intuição seu expurgo total da aritmética. Basta que retrocedamos a 1879 e 1884, anos das publicações da *Begriffsschrift* e dos *Die Grundlagen der Arithmetik* respectivamente, para constatar que tais obras tinham como objetivo fundamentar a aritmética em bases puramente lógicas.

No que respeita à geometria, não só não se verifica o mesmo empenho por parte de Frege, mas, pelo contrário, defende de maneira por vezes intransigente a intuição como base para essa ciência, na medida mesma em que se alinha à posição kantiana que a faz assentar sobre juízos sintéticos *a priori*.

Uma abordagem açodada que, por sua natureza, oferece o risco iminente de cometer desvios quaisquer e realizar, por isso, má interpretação do pensamento fregeano, até certo ponto é compreensível, todavia, não aceitável a hipotética afirmação de que Frege assume um comportamento ambíguo frente à filosofia transcendental kantiana. A diminuição dessa impressão meramente superficial é proporcional ao avanço na leitura dos *Grundlagen* até atingir sua culminância no parágrafo 89 em que o autor declara que Kant revelou a verdadeira natureza da geometria ao afirmar que esta

ciência fundamenta-se em juízos sintéticos *a priori*. Aqui, talvez, a passagem mais emblemática e representativa que, em essência, revela sim, sua dupla postura com relação aos juízos analítico e sintético, destacando o primeiro como a condição sem a qual a aritmética não atingiria o mínimo rigor em suas demonstrações e, como temos destacado, em franca discordância com Kant; limitando o último ao domínio da geometria apenas e nisso de pleno acordo com este. Eis a declaração de Frege:

"...Para aludir aqui apenas ao mais imediato, vejo em Kant o grande mérito de ter feito a distinção entre juízos sintéticos e analíticos. Ao chamar as verdades geométricas de sintéticas e *a priori*, revelou sua verdadeira natureza. E vale repeti-lo ainda uma vez, por ser algo ainda freqüentemente ignorada. Se Kant errou no que concerne à aritmética, isto não afeta essencialmente, creio eu, seu mérito. Importava-lhe a existência de juízos sintéticos *a priori*; que eles apareçam apenas na geometria, ou também na aritmética, é de menor importância"<sup>77</sup>.

É de fundamental importância, para nossa exposição, destacar a ênfase dada pelo autor no que respeita à *verdadeira natureza* das verdades da geometria, i.e., seu caráter sintético *a priori* que, é dito com certa assertividade, tem sido esta natureza, *freqüentemente ignorada*.

Portanto, não há lugar à dúvida sobre o consenso entre Kant e Frege no que concerne aos juízos sintéticos *a priori* na geometria. Mas por que razão Frege adere à concepção kantiana de juízos

---

<sup>76</sup> FRIEDMAN, Michael, *Kant and the Exact Sciences*, HARVARD UNIVERSITY PRESS, 1992 p. 100.

<sup>77</sup> FREGE, J. G. Os Fundamentos da Aritmética – Uma Investigação lógico-matemática sobre o conceito de Número: Tradução de Luís H. dos Santos. OS PENSADORES, Editora Abril, São Paulo, 1974, § 89.

sintéticos *a priori* na geometria, e com qual finalidade? E isso não é tudo: o que faz com que Frege defenda veementemente essa posição contra as geometrias não-Euclidianas?

Alcançaremos presumivelmente alguns subsídios para tornar possível ao menos cogitar respostas a tais questionamentos a partir do momento que analisarmos a concepção de geometria desses autores.

Quando tratarmos de geometria tanto em Kant como em Frege temos de ter presente que nos reportamos a um único e mesmo universo de discurso. A geometria euclidiana.

Não é em absoluto fortuito o fato de compartilharem dessa concepção de ciência, pois há outros elementos divididos entre conceitos e interesses que os unem a ela; essa ligação é mais afim do que, parece, pudesse ser apontada.

Começemos por apontar a concordância existente no que concerne à natureza e a definição do conceito de axioma.

Na *Lógica* Kant estabelece uma clara distinção entre dois princípios que possuem naturezas distintas. Ao primeiro cabe a característica intuitiva, ele o chama de axioma (*axiomata*) e ao segundo a natureza discursiva (*acroamas*). (Cf. KANT, I. *Lógica*, # 34 e # 35, A 172) Frege, por seu turno, oferece algumas definições para esse conceito no transcurso de sua produção filosófica, as quais acabaram por sofrer algumas transformações.

No ano de 1899 é publicada a obra *Grundlagen der Geometrie* de David Hilbert, período que marca o início de uma série de artigos que constituíram até 1906, a controvérsia travada por Frege e Hilbert cuja concepção formalista, desse último, desempenhará papel relevante no campo da matemática. Esta característica formal que Hilbert aplica a estas ciências (matemática e geometria) é que

animará a dissensão entre ambos. Com o advento das geometrias não-Euclidianas muda-se a forma de definição de alguns conceitos tais como axioma, que perde as suas características de auto-evidência e de verdade. Hilbert com o seu formalismo deixa bem claro não ter mais preocupação alguma a esse respeito, ele o concebe apenas como mera hipótese, como simples ponto de partida para o seu raciocínio. Segundo Hilbert, um axioma não é nem verdadeiro e nem falso, interessa-lhe tão-somente seu aspecto formal, e é justamente sobre este ponto em que tornam-se as perspectivas fregeana e hilbertiana inconciliáveis. A Frege jogam um papel decisivo a verdade, o conteúdo e a intuição para assegurar a objetividade do conhecimento, a Hilbert não. Portanto, entram em choque, inevitavelmente, a concepção semântica de Frege e o aspecto meramente sintático (formal) de Hilbert.

Na primeira série do *On the Foundations of Geometry* Frege oferece a seguinte definição de axioma.

*"Tradicionalmente, o que eu chamo de um axioma é um pensamento cuja verdade é certa sem, todavia, ser provável por uma corrente de inferências lógicas".*<sup>78</sup>

Em comparação à perspectiva kantiana sobre a natureza intuitiva dos axiomas, hão de ser notados dois pontos com respeito a ela: um que lhe é comum e outro distinto. No primeiro, Frege subscreve a natureza intuitiva do axioma, pois que a certeza de sua verdade não depende do processo discursivo representado por uma cadeia de inferência lógica. Portanto, é auto-evidente. O novo aspecto que

parece apontar para um caminho diverso do de Kant, deixa-se apreender no momento em que o autor identifica o axioma com um pensamento (*Gedanke*).

Sabemos da importância central desempenhada pela intuição na filosofia transcendental de Kant. No que tange à geometria, a intuição pura do espaço, base sobre a qual essa ciência assenta, é abordada na *Estética Transcendental da Crítica da Razão Pura* (Cf. A25/B39). Nessa seção o autor preocupa-se em destacar a natureza intuitiva, pura e *a priori* do espaço.

- 1) Só se pode ter a representação de um espaço único, o que está em perfeita consonância com o fato de a intuição ser o conhecimento imediato de um objeto singular;
- 2) Não existem outros espaços, mas partes do mesmo e único espaço;
- 3) Há uma anterioridade do todo com relação às partes, i.e., as partes desse espaço não podem ser pensadas senão nele. Percebe-se claramente, por meio da característica elencada por Kant, explícita a proposição aristotélica de que o todo é maior do que sua parte, que reaparece no quinto axioma de *Os elementos*;
- 4) O espaço é uno em sua essência, e a eventual diversidade que se possa apresentar é resultado de limitações feitas nesse espaço que é uno.

Ora, quando construímos magnitudes tais como retas, pontos, comprimentos, áreas, ou seja, quando representamos na intuição esses objetos, nós como que limitamos partes desse espaço uno que é anterior a essas mesmas partes. É em que se configura, em termos

---

<sup>78</sup> FREGE, J. G. *On Foundations of Geometry: First Series, in Collected Papers on Mathematics, Logic, and*

kantianos, como a condição de possibilidade dos objetos geométricos. Em outros termos, por meio da intuição *a priori* do espaço é que nos é dado o conteúdo, a parte material, que nos possibilita empreender a construção de conhecimento válido e objetivo no campo da geometria. É o que confirma Friedman nessa passagem:

*"Finalmente, portanto, a reivindicação de Kant da prioridade para a intuição singular do espaço repousa sobre nosso conhecimento da geometria. Nossa apreensão cognitiva da noção de espaço é manifesta, absolutamente, em nosso conhecimento geométrico"<sup>79</sup>.*

É notória a recepção negativa a que Frege expõe às geometrias não-Euclidianas. Com certo descrédito, mas, todavia, tolerante, faz referência, nos *Grundlagen*, à geometria não-Euclidiana de Riemann (geometria esférica na qual o espaço possui curvatura constante positiva). Nesse segmento de sua obra Frege destaca o caráter eminentemente lógico dessa geometria e o traço peculiar que divide com as demais, a saber, ser pouco ou nada intuitiva. Não é absolutamente intuitivo admitir que a distância mais curta não seja mais uma reta, mas uma curva, como as geodésicas da geometria Riemanniana. A mesma falta de evidência da qual, curiosamente, o V postulado de Euclides, por assim dizer, padecia. Frege, porém, mantém-se fiel à geometria euclidiana ao afirmar ser este espaço o único intuível. Eis um dos traços distintivos entre ambas.

*"...Apenas o pensamento conceitual pode de certo modo, desembaraçar-se deles, admitindo, digamos, um espaço de quatro dimensões ou com*

---

*Philosophy*, p. 273.

<sup>79</sup> FRIEDMAN, Michael, *Kant and the Exact Sciences*, HARVARD UNIVERSITY PRESS, 1992 p.70.

*medida positiva de curvatura. Tais considerações não são absolutamente inúteis; mas abandonam completamente o terreno da intuição. Quando também neste caso recorremos a ela, trata-se sempre da intuição do espaço euclidiano, o único de que podemos fazer imagem...*<sup>80</sup>

Como anteriormente afirmado<sup>81</sup>, há outros interesses que ligam Frege e Kant à geometria euclidiana. Kant necessita da intuição a priori manifesta nas duas formas da sensibilidade - espaço e tempo - porque é através dela que nos é dado o múltiplo das sensações - o conteúdo, a parte material - que se constituirá em conhecimento válido e objetivo. Frege, por outro lado, também defende uma certa espécie de conteúdo como parte indispensável a obtenção de conhecimento, contudo, um conteúdo de natureza proposicional.

Doravante iremos mostrar como se deu a transformação do conceito de axioma no pensamento fregeano. Nos *Grundlagen der Arithmetik* Frege identifica axioma com as leis gerais que não necessitam e nem exigem demonstração. É importante chamar a atenção para o fato de que o autor ainda não havia realizado a distinção entre sentido (*Sinn*) e referência (*Bedeutung*) o que só ocorrerá em 1892.

No artigo *On Euclidean Geometry* escrito entre 1899 e 1906, tão conciso quanto incisivo, Frege recrudesce totalmente a relação pouco cordial que mantinha com as geometrias não-Euclidianas, tornando nítido cada vez mais a mudança de eixo temático pela qual passa sua filosofia. Em uma palavra, Frege começa a descolar-se do âmbito da lógica para o campo da semântica e com isso abre caminho para novas

---

<sup>80</sup> FREGE, J. G. Os Fundamentos da Aritmética – Uma Investigação lógico-matemática sobre o conceito de

áreas de estudo na filosofia, notadamente, as filosofias analítica e da linguagem. Por outro lado, afasta-se de Kant, pois que a semântica, até o ponto em que investigamos, parece ser estranha a esse pensador.

Isso tudo talvez se configure em pontos obscuros se não acompanharmos não propriamente o abandono por parte de Frege de algumas de suas concepções, mas a mudança na direção de suas pesquisas, se não atentamos para os acontecimentos importantes que a cercaram.

A descoberta de uma contradição no sistema lógico das *Grundgesetze* de Frege em 1902, por parte de Russell, constitui-se num fato de primeira ordem e decisivo para os rumos do logicismo. É possível detectar, por meio do agradecimento de Frege a Russell ao reconhecer seu achado, como se fosse, por assim dizer, o canto do cisne de seu projeto logicista. (Cf. BEANEY, Michael. *The Frege Reader*, pp. 279-289)

É possível sustentar que a partir de então, acentua-se por parte de Frege, a inclinação em direcionar seus interesses filosóficos, desenvolvidos em 1892 com o artigo *Sinn und Bedeutung*, para o campo da semântica, conquanto seja possível identificar um movimento nesse sentido já nos *Grundlagen* e até mesmo na *Begriffsschrift*. Portanto, não é sem mais que se verifica tal deslocamento.

Voltemos a considerar algumas das passagens desse artigo acerca da geometria euclidiana a fim de que possamos confirmar nossa suposição segundo a qual Frege começa a ter de forma mais insistente



e consistente interesses de natureza semântica, sobretudo a partir da constatação de inconsistência de seu logicismo.

*"Todavia não é a própria sentença que realmente nos interessa quando falamos, mas o sentido ou o conteúdo que associamos a ela e que desejamos comunicar. Porque o sentido mesmo não pode ser percebido pelos sentidos, temos a necessidade, a fim de comunicar, de algo para nos ajudar que possa ser percebido. Assim a sentença e seu sentido, o perceptível e o imperceptível, estão relacionados"* <sup>82</sup>.

*"Quem sustenta que a geometria euclidiana é verdadeira atribui um sentido a cada um de seus teoremas: ele considerará cada teorema como expressando uma verdade, ele, além disso, exigirá que reconheça que os conceitos 'ponto', 'linha', 'plano' tenham sentido. Na geometria euclidiana, a certas verdades tem tradicionalmente sido concedido o status de axiomas"*. <sup>83</sup>

Note-se que no primeiro trecho, Frege se expressa conceitualmente já de maneira diferente. Põe acento no sentido, no conteúdo da sentença que tem de ser comunicados; associa à sentença um caráter perceptível e ao sentido a natureza de ser imperceptível. Frege em seu artigo *Gedanke* de 1918 utiliza-se de uma metáfora que retoma no essencial esta passagem.

*"...O pensamento, em si mesmo é imperceptível pelos sentidos, veste-se no traje perceptível de uma sentença, e deste modo, somos capazes de apreendê-lo. Dizemos que uma sentença expressa um pensamento..."*<sup>84</sup>

---

<sup>82</sup> FREGE, J. G. *On Euclidean Geometry* in *Posthumous Writings*, Basil Blackwell, 1979. p. 166.

<sup>83</sup> *Idem*, p. 168.

<sup>84</sup> FREGE, J. G. *Thought in The Frege Reader*, Blackwell Publishers, Ltd. Edited by M. Beaney p. 328

Implicitamente, na segunda citação, Frege faz referência ao modo como Hilbert entendem ser um axioma, i.é., como vimos, nem verdadeiro nem falso. Portanto, do ponto de vista fregeano, algo sem sentido, sem conteúdo.

Nos dois últimos fragmentos Frege dá sinais inequívocos de sua postura favorável à geometria euclidiana e, evidentemente, contrário às geometrias não-Euclidianas. Pode-se perfeitamente entender, com um certo grau de liberdade na linguagem, que quando Frege diz utilizar-se tradicionalmente de um determinado conceito da geometria, ele quer significar que tal conceito geométrico foi usado "euclidianamente".

Frege faz uso da parábola dos dois senhores proferida por Jesus Cristo no Sermão da Montanha. Aqui fica expresso o auge de sua intransigência e radicalismo na medida em que impõe a essa passagem a estrutura de uma das leis lógicas do pensamento, isto é, a do terceiro excluído. Dá-nos a crer que em nenhum momento admite a possibilidade da existência dos dois estudos ou sistemas acerca do espaço e suas propriedades. Frege assume um tom excludente como respeito a essas geometrias: ou uma ou a outra é verdadeira, mas não as duas.

*"Nenhum homem pode servir a dois senhores. Não pode servir a ambas a verdade e a falsidade. Se a geometria euclidiana é verdadeira, então a geometria não-Euclidiana é falsa, e se a geometria não-Euclidiana é verdadeira, então a geometria euclidiana é falsa"* <sup>85</sup>.

---

<sup>85</sup> FREGE, J. G. *On Euclidean Geometry in Posthumous Writings*, Basil Blackwell, 1979. p. 169.

Frege faz uma vez mais alusão à postura formalista de Hilbert no que tange aos axiomas, a saber, somente se se trata da geometria como uma não ciência tal como a astrologia é que se pode encarar as proposições euclidianas como algo desprovido de sentido, i.é., nem falsas nem verdadeiras, como meras hipóteses. E, ao final e ao cabo desse trecho, Frege parece ter-se esquecido que ele próprio foi o responsável direto por uma revolução radical em alguns aspectos fundamentais envolvendo o edifício da lógica aristotélica, mais longo do que a geometria euclidiana. Guardadas todas as proporções, aqui Frege iguala sua reivindicação segundo a qual por ter mais de 2000 anos a geometria mantivera seu prestígio inabalável, ao argumento de Kant com relação à lógica aristotélica. Vamos a ele.

*"Ousamos a tratar Os Elementos de Euclides, que tem exercido domínio inquestionável por 2000 anos, como temos tratado a astrologia? Isto é, somente se nos atrevermos a isso que podemos colocar os axiomas de Euclides como proposições que não são nem falsas nem duvidosas. Neste caso a geometria não-Euclidiana terá de ser contada entre as pseudociências, para o estudo das quais juntamos ainda a algo de insignificante importância, mas somente como uma curiosidade histórica" <sup>86</sup>.*

Na disputa com Hilbert Frege ganha o aporte de um crítico do pensamento hilbertiano de primeira hora e de grande envergadura científica. Poincaré em resenha que leva o título *Revisão dos Fundamentos da Geometria de Hilbert* expressa manifestamente a mesma posição de Frege com respeito à falta de sentido e significado dos

termos empregados pelo autor que, com isso, demonstra não ter realmente preocupação alguma com o aspecto semântico da geometria, mas tão-só com sua estrutura formal, com sua estrutura sintática. Nestes três trechos é possível identificar marcas muito próprias e peculiares da argumentação fregeana.

*"Desta maneira, o Professor Hilbert quis, por assim dizer, pôr os axiomas numa forma tal que pudessem ser aplicados por uma pessoa que não percebesse o seu significado, por nunca ter visto nem um ponto, nem uma reta ou um plano. De acordo com ele, deveria ser possível reduzir o raciocínio a regras puramente mecânicas, e para criar uma geometria deveria bastar aplicar estas regras cegamente aos axiomas sem saber o que os axiomas significam".*<sup>87</sup>

*"Se o conseguirmos, poderemos estar seguros que nada foi esquecido. Pois a nossa máquina não pode trabalhar senão de acordo com as regras da lógica para as quais construídas; ignora o vago instinto a que chamamos intuição".*<sup>88</sup>

*"Se considerarmos três diâmetros da mesma esfera existentes num mesmo plano diametral não teremos qualquer razão para dizer que um deles está entre os outros dois. A palavra "entre" não tem agora qualquer sentido, e os axiomas da ordem ficam naturalmente excluídos".*<sup>89</sup>

Tomando por base os dois capítulos introdutórios que serviram de estágios necessários para que pudessemos desdobrar a proposta

---

<sup>86</sup> *Idem*, p. 169

<sup>87</sup> POINCARÉ, H. Suplemento in David Hilbert. Tradução baseada na 7ª ed. de *Grundlagen der Geometrie*, Gradiva Publicações Ltda., Portugal, 2003, pp. 318.

<sup>88</sup> *Idem*. pp. 318-319

dessa dissertação, atingimos com esse terceiro capítulo o término de nosso trabalho, esperando, mais do que tudo, ter alcançado de forma integral o objetivo por nós postulado.

Partindo do que foi tratado por nós ao longo desses três capítulos, constatamos a importância direta da influência do pensamento de Frege como uma das fontes para a criação e desenvolvimento da filosofia contemporânea. Embora não possamos afirmar categoricamente que o seu debate com Kant tenha sido a condição sem a qual a ascendência ora aludida sobre a filosofia de nossos dias pudesse se efetivar, é fato inquestionável a presença e a atuação do pensamento kantiano ainda hoje. Não há dúvidas de que Frege representa um elo, uma ponte através dos quais as filosofias dos séculos XVIII e XIX não apenas se comunicam como, também, se reaproximam o que permite sempre uma nova análise à luz do passado, condição sem a qual não há avanço no âmbito do conhecimento.

Um ponto de partida no sentido de verificar a extensão do pensamento kantiano em nossos dias, vale dizer, é feito Stenius (Cf. *Wittgenstein's Tractatus: a Critical Exposition of its main Lines of Thought*). O autor sustenta a seguinte proposição: Há em Wittgenstein, assim como em Kant, a tendência de estabelecer um limite. Contudo, no autor do *Tractatus* o objeto era a linguagem, isto é, sobre o que pode ser dito, ao passo que em Kant havia a necessidade de impor limites ao conhecimento, a saber, o que podemos conhecer?

Outros fatos podem ser aduzidos a essa discussão, como, por exemplo, a crítica de Quine a concepção de analiticidade de Frege

---

<sup>89</sup> *Idem.* p. 322

podem remontar a Kant. Em seu artigo *Dois dogmas do Empirismo*, uma referência obrigatória quanto o assunto focado é a analiticidade, o autor expõe à crítica contundente a tentativa em definir o conceito de analiticidade com base na sinonímia, pois que todas as teorias de sinonímia são insuficientes para tal objetivo. O que confirma que a filosofia foi é e sempre será construída tendo como elementos cardinais o debate, o confronto e a análise de suas principais questões.

## 5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

O fato de ter-se mantido ligado à filosofia kantiana, e sua aceitação dos juízos sintéticos *a priori* na geometria, como vimos, é suficientemente consistente e permite-nos levantar a tese de que Frege tinha uma preocupação epistemológica assim como Kant, e que seu objetivo não seria apenas fundamentar a aritmética sobre a lógica.

Notemos que comparativamente à empresa de Kant não cabem dúvidas de que o intento de Frege é bem mais modesto, contudo, à medida que tenta dar fundamentos lógicos à aritmética, isto é, assegurar a validade e legitimidade de tal ciência, Frege em certa medida, estaria sim ocupado com uma questão de cunho epistemológico. Pode-se afirmar também que não rompe definitivamente com o pensamento de Kant, ainda que imponha a ele duras críticas e correções relevantes, afora o fato de inaugurar uma área completamente nova dentro do âmbito filosófico: a filosofia analítica. Frege representa em alguns aspectos uma continuação do projeto kantiano, o fato mesmo de ter escolhido a filosofia de Kant para, num primeiro momento, criticá-la e depois segui-la. Nos *Grundlagen* Frege critica vários pensadores inclusive J. S. Mill. É legítimo pensar que se Frege não tivesse simpatia pela filosofia de Kant - e possuímos um testemunho disso nessa mesma obra - seria suficiente dispensar o mesmo tratamento a Kant que deu aos outros. No entanto, é sabido que a controvérsia de ambos os filósofos concentra-se na questão de quais juízos fundamentam a aritmética que são, para Frege, os analíticos e para Kant os juízos sintéticos a

*priori*; além do fato de haver total concordância com respeito à aplicação desses últimos na esfera da geometria.

O autor T. Burge é um dos que sustentam que Frege tem uma concepção epistemológica (Cf. *Frege on Apriority*) e chega a traçar um paralelo com Kant ao evocar o parágrafo 3 dos *Fundamentos* no qual Frege realiza a redefinição dos conceitos kantianos. Seguindo a mesma linha de análise encontramos P. Kitcher (Cf. *Frege's Epistemology*) que afirma ver em Frege como portador de um legado de natureza epistemológica que de alguns de seus predecessores. J. Weiner por sua vez (Cf. *Frege and the Linguistic Turn*) vê um projeto epistemológico fregeano na medida mesmo em que busca a fonte da justificação de nosso conhecimento acerca das verdades aritmética.

Uma voz discordante nesse debate é P. Benacerraf (Cf. *The Last Logician*). Sua posição revela que Frege perseguia o objetivo de analisar possíveis relações metafísicas entre as proposições matemáticas.

Obras e condições históricas há muito estão dadas, resta-nos perscrutar nessas fontes e extrair razões convincentes o suficiente a fim de reafirmar ou refutar as teses quaisquer que possam ser suscitadas à luz, sobretudo da produção desses autores.



## 6 - BIBLIOGRAFIA

- BEANEY, M. *The Frege Reader*. Blackwell Publishers, Oxford, 1997.
- BOCHENSKI, I. M. *A History of Formal Logic*. University of Notre Dame Press, 1961.
- BURGE, T. *Frege on Apriority*, in *New Essays on the A Priori*. Oxford: Clarendon Press, 2000
- CARL, W. *Frege's Theory of Sense and Reference - Its Origins and Scope*. Cambridge University Press, 1994.
- COFFA, J. A. *The semantic tradition from Kant to Carnap - To the Vienna Station*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- DE VLEESCHAWER, Herman-Jean. *La evolución del pensamiento kantiano*. Trad. Ricardo Guerra. México, Unam, 1960.
- DUMMETT, M. *Origins of Analytical Philosophy*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1996.
- FREGE, G. [Collected Papers] *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*, B. McGuinness, ed.; M. Black, V. H. Dudman, P. Geach, H. Kaal, E-H. W. Kluge, B. McGuinness, and R. M. Stoothoff, trans. Blackwell Publisher, Oxford, 1984.
- \_\_\_\_\_. *Posthumous Writings*, P. Long and R. White, eds. Basil Blackwell, Oxford, 1979.
- FRIEDMAN, M. *Kant and the Exact Sciences*, Harvard University Press, 1992.
- \_\_\_\_\_. *Geometry, construction and intuition in Kant and his successors*. In G. Sher, & R. Tieszen (Eds.), *Between logic and*

*intuition: Essays in honor of Charles Parsons* (pp. 186-218).  
Cambridge: Cambridge University Press.

HAACK, S. *Philosophy of Logics*, Cambridge University Press, 1978

HEIJENOORT, J. V. *From Frege to Gödel*. Harvard University Press,  
Cambridge, Massachusetts. London, England, 1977.

KANT, I. *Crítica da Razão Pura*, Fundação Calouste Gulbenkian.  
Tradução de Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique  
Morujão. Lisboa, 1997

KENNY, A. *Frege*. Penguin Books, London, 1995.

KITCHER, P. *Frege's Epistemology*, in *The Philosophical Review*,  
LXXXVIII, N° 2 (April 1979).

KNEALE W. & M. KNEALE. *The development of logic*. Oxford: Clarendon  
Press, 1962.

PATON, H. J. *Kant's Metaphysic of Experience*. The Macmillan Company,  
New York, 1936.

SAJAMA, S. & KAMPPINEN, M. *A Historical Introduction to  
Phenomenology*. Kent & Row, New York. 1987.

SLUGA, H. D. *Gottlob Frege: The Arguments of the Philosophers*.  
London and New York, 1998

SMITH, N. K. *A commentary to Kant's "Critique of Pure Reason."*  
Humanity Books, New York, 1999.

STENIUS, E. *Wittgenstein's Tractatus: a Critical Exposition of its  
main Lines of Thought*. Oxford: Basil Blackwell.

TORRETTI, R. *Manuel KANT - Estudio sobre los fundamentos de la  
filosofia crítica*, Segunda Edición, Vols. I-II, Editorial  
Charcas, Buenos Aires, 1980.

WEINER, J. *Frege. Past Masters*, Oxford University Press, 1999.